GAL, Kolokwium 1 TEMAT **A** 18.11.2011

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\,(z) < 0,\ \mathrm{Im}\,(z) \leqslant 0,\ |z| < 8\}$ i niech funkcja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $f(z) = z^3$.
   (a) Naszkicować zbiory $\mathcal{D}$ oraz $f^{-1}(\mathcal{D})$.
   (b) Znaleźć wszystkie pierwiastki równania $z^3 = |z|$, które należą do $\mathcal{D}$.
2. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są wektory $\alpha_1 = (1,-1,1,-1)$, $\alpha_2 = (0,1,0,1)$, $\alpha_3 = (-1,-2,-1,-2)$, $\beta = (1,1,1,0)$ oraz podprzestrzeń V opisana następującym układem równań
$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \end{cases}$$
   (a) Czy wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rozpinają V? Czy wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są bazą V? Czy β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?
   (b) Podać przykład bazy $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ w $\mathbb{R}^4$ takiej, że $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ oraz wektor β ma w tej bazie współrzędne $1, 1, -1, 1$.
3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są podprzestrzenie $V = \mathrm{lin}\,((1,1,-2),(1,2,-3),(2,3,-5))$ oraz $W_t = \mathrm{lin}\,((2,3,-5),(1,-2,2+t))$.
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V. Udowodnić, że V można opisać jednym równaniem.
   (b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W_t = V$?
4. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$.
   (a) Wykazać, że jeśli układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jest liniowo niezależny, to istnieją wektory $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ takie, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ jest bazą V,
   (b) Wykazać, że jeśli $V = \mathrm{lin}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, to z układu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ można wybrać podukład $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$, który jest bazą V.
5. (a) Podać przykład przestrzeni liniowej V nad skończonym ciałem K takiej, że $V = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ dla pewnych podprzestrzeni właściwych $W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$ (podprzestrzeń W przestrzeni V nazywamy właściwą, jeśli $W \neq V$ i $W \neq \{\theta\}$).
   (b) Niech V będzie przestrzenią liniową nad nieskończonym ciałem K. Udowodnić, że $V \neq W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ dla dowolnych właściwych podprzestrzeni $W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$.

GAL, Kolokwium 1 TEMAT **B** 18.11.2011

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\,(z) \leqslant 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0,\ |z| < 27\}$ i niech funkcja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $f(z) = z^3$.
   (a) Naszkicować zbiory $\mathcal{D}$ oraz $f^{-1}(\mathcal{D})$.
   (b) Znaleźć wszystkie pierwiastki równania $z^3 = |z|$, które należą do $\mathcal{D}$.

2. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dane są wektory $\alpha_1 = (1,-1,-1,1)$, $\alpha_2 = (1,0,0,1)$, $\alpha_3 = (3,-1,-1,3)$, $\beta = (1,1,1,0)$ oraz podprzestrzeń V opisana następującym układem równań
$$\begin{cases} x_1 & & & -x_4 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & +x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{cases}$$
   (a) Czy wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rozpinają V? Czy wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ są bazą V? Czy β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?
   (b) Podać przykład bazy $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ w $\mathbb{R}^4$ takiej, że $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ oraz wektor β ma w tej bazie współrzędne $-1, 1, 2, -1$.

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są podprzestrzenie $V = \mathrm{lin}\,((1,1,2),(1,2,3),(2,3,5))$ oraz $W_t = \mathrm{lin}\,((2,3,5),(1,-1,t-1))$.
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V. Udowodnić, że V można opisać jednym równaniem.
   (b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W_t = V$?

4. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową oraz $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in V$.
   (a) Wykazać, że jeśli układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ jest liniowo niezależny, to istnieją wektory $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ takie, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ jest bazą V,
   (b) Wykazać, że jeśli $V = \mathrm{lin}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, to z układu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ można wybrać podukład $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$, który jest bazą V.

5. (a) Podać przykład przestrzeni liniowej V nad skończonym ciałem K takiej, że $V = W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ dla pewnych podprzestrzeni właściwych $W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$ (podprzestrzeń W przestrzeni V nazywamy właściwą, jeśli $W \neq V$ i $W \neq \{\theta\}$).
   (b) Niech V będzie przestrzenią liniową nad nieskończonym ciałem K. Udowodnić, że $V \neq W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_n$ dla dowolnych właściwych podprzestrzeni $W_1, W_2, \ldots, W_n \subseteq V$.