GAL, Kolokwium 1 TEMAT **A** 19.11.2010

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\,(z) < 0,\ \mathrm{Im}\,(z) > 0,\ |z| < 2\}$ i niech funkcja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $f(z) = (1+i)\cdot z^2 + 1$.
   (a) Naszkicować zbiory $\mathcal{D}$ oraz $f(\mathcal{D})$.
   (b) Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $z_k = \frac{(1+i\sqrt{3})^k}{300}$. Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $z_k \in \mathcal{D}$?

2. W $\mathbb{R}^4$ rozpatrzmy podprzestrzeń $V = \mathrm{lin}\,((1,2,1,2),(3,5,1,7),(5,9,3,11))$.
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V. Czy wektor $\alpha = (1,1,0,1)$ należy do V?
   (b) Znaleźć układ równań liniowych opisujący V. Czy V można opisać jednym równaniem liniowym? Czy V można opisać układem trzech równań liniowych? Odpowiedź uzasadnij.

3. W $\mathbb{R}^4$ rozpatrzmy podprzestrzeń W będącą przestrzenią rozwiązań układu równań
$$U\colon \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni W. Znalezioną bazę przestrzeni W dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ w taki sposób aby w tej bazie wektor $\beta = (1,2,4,3)$ miał współrzędne $1,1,0,1$. Czy istnieje baza przestrzeni W, którą można dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ w ten sposób, że wektor β ma w tej bazie współrzędne $1,1,0,0$? Odpowiedź uzasadnij.
   (b) Niech $W_s = \mathrm{lin}\,((1,5,1,3),(2,3s+10,s+2,2s+6)$. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W_s = W$?

4. Niech $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V. Stosując definicje: podprzestrzeni, kombinacji liniowej układu wektorów i liniowej niezależności układu wektorów, wykazać, że
   (a) Zbiór $\mathrm{lin}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.
   (b) Jeśli układ $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ jest liniowo niezależny oraz $\beta \in V$, to
układ $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy $\beta \notin \mathrm{lin}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$.

5. (a) W $\mathbb{R}^3$ podać przykład takiego układu wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$, którego każdy jego podukład złożony z trzech wektorów jest liniowo niezależny.
   (b) Czy istnieje taki układ wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\alpha_{n+2}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, którego każdy podukład złożony z n wektorów jest liniowo niezależny? Czy istnieje taki nieskończony układ wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, którego każdy podukład złożony z n wektorów jest liniowo niezależny? Uzasadnić.

GAL, Kolokwium 1 TEMAT **B** 19.11.2010

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\,(z) > 0,\ \mathrm{Im}\,(z) < 0,\ |z| < 3\}$ i niech funkcja $f \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ będzie zadana wzorem $f(z) = (1+i) \cdot z^2 - 1$.
   (a) Naszkicować zbiory $\mathcal{D}$ oraz $f(\mathcal{D})$.
   (b) Dla $k \in \mathbb{N}$ niech $z_k = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^k}{200}$. Dla jakich $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $z_k \in \mathcal{D}$?

2. W $\mathbb{R}^4$ rozpatrzmy podprzestrzeń $V = \mathrm{lin}\,((1,-1,2,1),(3,-2,7,1),(4,-5,7,6))$.
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V. Czy wektor $\alpha = (1,-2,1,2)$ należy do V?
   (b) Znaleźć układ równań liniowych opisujący V. Czy V można opisać jednym równaniem liniowym? Czy V można opisać układem trzech równań liniowych? Odpowiedź uzasadnij.

3. W $\mathbb{R}^4$ rozpatrzmy podprzestrzeń W będącą przestrzenią rozwiązań układu równań
$$U\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$
   (a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni W. Znalezioną bazę przestrzeni W dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ w taki sposób aby w tej bazie wektor $\beta = (2,-4,-2,3)$ miał współrzędne $1,1,0,1$. Czy istnieje baza przestrzeni W, którą można dopełnić do bazy przestrzeni $\mathbb{R}^4$ w ten sposób, że wektor β ma w tej bazie współrzędne $1,1,0,0$? Odpowiedź uzasadnij.
   (b) Niech $W_s = \mathrm{lin}\,((1,3,1,1),(3,5s+9,s+3,2s+3))$. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $W_s = W$?

4. Niech $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V. Stosując definicje: podprzestrzeni, kombinacji liniowej układu wektorów i liniowej niezależności układu wektorów, wykazać, że
   (a) Zbiór $\mathrm{lin}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V.
   (b) Jeśli układ $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ jest liniowo niezależny oraz $\beta \in V$, to
układ $\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy gdy $\beta \notin \mathrm{lin}\,(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$.

5. (a) W $\mathbb{R}^3$ podać przykład takiego układu wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$, którego każdy jego podukład złożony z trzech wektorów jest liniowo niezależny.
   (b) Czy istnieje taki układ wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1},\alpha_{n+2}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, którego każdy podukład złożony z n wektorów jest liniowo niezależny? Czy istnieje taki nieskończony układ wektorów $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, którego każdy podukład złożony z n wektorów jest liniowo niezależny? Uzasadnić.