GAL, Kolokwium 2, 22.01.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **A**

(1) Dla dowolnych parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ niech W_{st} będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ opisaną następującym układem równań:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +(s-1)x_3 & -2x_4 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & tx_4 & = 0 \\ x_1 & -3x_3 & (2s-1)x_3 & (t-4)x_4 & = 0 \end{cases}$$

i niech $V = lin((1,2,1,-2),(1,-1,1,1),(-1,10,-1,-10)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Dla jakich parametrów $s, t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_{st}$.
(b) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $V \cap W_{st}$ w zależności od s i t. Znaleźć wymiar przestrzeni $V + W_{st}$ w zależności od s i t.
(c) Czy istnieją takie parametry $s, t \in \mathbb{R}$, że $V \cap W_{st} = V$?

(2) Niech $\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2, gdzie V_1, V_2 są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$ opisanymi następującymi układami równań:

$$V_1 : \begin{cases} x_1 & -2x_2 & & +x_4 & = 0 \\ -2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}, \quad V_2 : \begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & -2x_2 & +2x_3 & & = 0 \end{cases},$$

(a) Znaleźć wzór na φ oraz jego macierz w bazie standardowej.
(b) Podać przykłady (podając wzory) przekształceń liniowych $\psi_1, \psi_2: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ takich, że $dim(im\psi_1) = 1$, $dim(im\psi_2) = 2$ oraz $\varphi \circ \psi_1$, $\varphi \circ \psi_2$ są przekształceniami zerowymi (tzn. $\varphi \circ \psi_1(v) = (0,0,0,0) = \varphi \circ \psi_2(v)$ dla dowolnego wektora v).
(c) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\psi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ takie, że $dim(im\psi) = 3$ i $\varphi \circ \psi$ jest przekształceniem zerowym.

(3) Niech $\mathcal{A} : (2,1,2),(1,1,0),(-2,-2,1)$ i $\mathcal{B} : (1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)$ będą dwiema bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że

$$M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{S}t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową w $\mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć współrzędne wektora $\varphi((2,-1,2))$ w bazie $\mathcal{A}$.
(b) Znaleźć wzór na $\psi \circ \varphi$.
(c) Znaleźć bazę $ker(\psi)$. Czy $ker(\psi) = ker(\psi \circ \varphi)$?

(4) Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi: V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że

(a) $ker(\varphi)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.
(b) $dim(ker\varphi) + dim(im\varphi) = dimV$

(5) Dla $i = 0, 1, 2$, niech $\varphi_i: V_i \longrightarrow V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym pomiedzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Udowodnić, że

(a) $r(\varphi_1) \leq r(\varphi_2 \circ \varphi_1) + dim(ker\varphi_2)$.
(b) $r(\varphi_2 \circ \varphi_1) + r(\varphi_1 \circ \varphi_0) \leq r(\varphi_1) + r(\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_0)$.

$r(\varphi)$ oznacza rząd przekształcenia φ, tzn. $r(\varphi) = dim(im\varphi)$.

GAL, Kolokwium 2, 22.01.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **B**

(1) Dla dowolnych parametrów $s,t \in \mathbb{R}$ niech W_{st} będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^4$ opisanaą następującym układem równań:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +tx_3 & -2x_4 & =0 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & (s+1)x_4 & =0 \\ x_1 & -3x_3 & (2t+1)x_3 & (s-3)x_4 & =0 \end{cases}$$

i niech $V = lin((-1,2,-1,-2),(-1,1,-1,-1),(-7,10,-7,-10)) \subseteq \mathbb{R}^4$.

(a) Dla jakich parametrów $s,t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4 = V \oplus W_{st}$.

(b) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni $V \cap W_{st}$ w zależności od s i t. Znaleźć wymiar przestrzeni $V + W_{st}$ w zależności od s i t.

(c) Czy istnieją takie parametry $s,t \in \mathbb{R}$, że $V \cap W_{st} = V$?

(2) Niech $\varphi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na V_1 wzdłuż V_2, gdzie V_1, V_2 są podprzestrzeniami $\mathbb{R}^4$ opisanymi następującymi układami równań:

$$V_1: \begin{cases} x_1 & -2x_2 & & +2x_4 & =0 \\ -x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & =0 \end{cases}, \quad V_2: \begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +x_4 & =0 \end{cases},$$

(a) Znaleźć wzór na φ oraz jego macierz w bazie standardowej.

(b) Podać przykłady (podając wzory) przekształceń liniowych $\psi_1, \psi_2: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ takich, że $dim(im\psi_1) = 1$, $dim(im\psi_2) = 2$ oraz $\varphi \circ \psi_1$, $\varphi \circ \psi_2$ są przekształceniami zerowymi (tzn. $\varphi \circ \psi_1(v) = (0,0,0,0) = \varphi \circ \psi_2(v)$ dla dowolnego wektora v).

(c) Czy istnieje przekształcenie liniowe $\psi: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ takie, że $dim(im\psi) = 3$ i $\varphi \circ \psi$ jest przekształceniem zerowym.

(3) Niech $\mathcal{A}: (2,1,2),(1,1,0),(-2,-2,1)$ i $\mathcal{B}: (1,1,1,),(1,1,0),(1,0,1)$ będą dwiema bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\varphi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ i $\psi: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będą przekształceniami liniowymi takimi, że

$$M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{S}t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M(\psi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową w $\mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć współrzędne wektora $\varphi((2,2,-1))$ w bazie $\mathcal{B}$.

(b) Znaleźć wzór na $\psi \circ \varphi$.

(c) Czy $ker(\varphi) = ker(\psi \circ \varphi)$?

(4) Niech V i W będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K i niech $\varphi: V \longrightarrow W$ będzie przekształceniem liniowym. Udowodnić, że

(a) $ker\varphi$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.

(b) $dim(ker\varphi) + dim(im\varphi) = dimV$

(5) Dla $i = 0,1,2$, niech $\varphi_i: V_i \longrightarrow V_{i+1}$ będzie przekształceniem liniowym pomiedzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Udowodnić, że

(a) $r(\varphi_1) \leq r(\varphi_2 \circ \varphi_1) + dim(ker\varphi_2)$.

(b) $r(\varphi_2 \circ \varphi_1) + r(\varphi_1 \circ \varphi_0) \leq r(\varphi_1) + r(\varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_0)$.

$r(\varphi)$ oznacza rząd przekształcenia φ, tzn. $r(\varphi) = dim(im\varphi)$.