

GAL potok 1, kolokwium nr 1, 23.11.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Niech $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ i niech $D = \{w \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(iw) > 0\}$.

a) Znaleźć liczby rzeczywiste a, b takie, że $z^{100} = a + bi$.

b) Naszycować zbiór D . Dla jakich liczb naturalnych $1 \leq k \leq 24$ zachodzi $z^k \in D$?

2. W przestrzeni \mathbf{R}^4 rozpatrzmy wektory $\alpha_1 = (1, 3, 1, 3), \alpha_2 = (3, 8, 2, 9), \alpha_3 = (1, 5, 2, 6), \beta = (0, 3, 2, 3)$.

a) Czy układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest liniowo niezależny? Czy wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?

b) Podać przykład takiego wektora $\gamma \in \mathbf{R}^4$, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$ jest bazą przestrzeni \mathbf{R}^4 . Niech y_1, y_2, y_3, y_4 będą współrzędnymi wektora α_3 w otrzymanej bazie. Znaleźć y_4 .

3. Niech $V = \operatorname{lin}((1, 1, -2, -5), (1, 2, -3, -8), (3, 4, -7, -18)) \subset \mathbf{R}^4$ i dla każdego $s \in \mathbf{R}$ niech $W_s \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + sx_4 = 0. \end{cases}$$

a) Opisać przestrzeń V układem równań liniowych.

b) Dla jakich wartości $s \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $\mathbf{R}^4 = V \oplus W_s$?

4. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V .

a) Wykazać, że układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z wektorów tego układu nie jest kombinacją liniową pozostałych.

b) Wykazać, że jeśli układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i $\beta \in V$, to układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

5.

a) Niech W będzie k wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech W_1, W_2 będą jej podprzestrzeniami takimi, że $W_1 \neq W_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$ oraz $\dim (W_1 \cap W_2) = k - 2$. Wykazać, że $W = W_1 + W_2$.

b) Niech V_1, V_2, V_3 będą m wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V takimi, że $\dim (V_1 \cap V_2) = \dim (V_1 \cap V_3) = \dim (V_2 \cap V_3) = m - 1$. Wykazać, że $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3$ lub $\dim (V_1 + V_2 + V_3) = m + 1$.

c) Niech V_1, V_2, \dots będzie ciągiem m wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni liniowej V takim, że $\dim (V_i \cap V_j) = m - 1$ dla wszystkich $i \neq j$. Wykazać, że: (istnieje podprzestrzeń $W \subset V$ taka, że $\dim W = m - 1$ oraz $W \subset V_i$ dla każdego i) lub (istnieje podprzestrzeń $Z \subset V$ taka, że $\dim Z = m + 1$ oraz $V_i \subset Z$ dla każdego i).

GAL potok 1, kolokwium nr 1, 23.11.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat B

1. Niech $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ i niech $D = \{w \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}(iw) < 0\}$.

a) Znaleźć liczby rzeczywiste a, b takie, że $z^{99} = a + bi$.

b) Naszkicować zbiór D . Dla jakich liczb naturalnych $1 \leq k \leq 24$ zachodzi $z^k \in D$?

2. W przestrzeni \mathbf{R}^4 rozpatrzmy wektory $\alpha_1 = (1, 4, 2, 1), \alpha_2 = (2, 9, 3, 3), \alpha_3 = (1, 5, 0, 2), \beta = (1, 2, 5, -1)$.

a) Czy układ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest liniowo niezależny? Czy wektor β jest kombinacją liniową wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?

b) Podać przykład takiego wektora $\gamma \in \mathbf{R}^4$, że układ $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$ jest bazą przestrzeni \mathbf{R}^4 . Niech y_1, y_2, y_3, y_4 będą współrzędnymi wektora α_3 w otrzymanej bazie. Znaleźć y_4 .

3. Niech $V = \operatorname{lin}((1, 1, -3, -7), (1, 2, -5, -12), (2, 1, -4, -9)) \subset \mathbf{R}^4$ i dla każdego $s \in \mathbf{R}$ niech $W_s \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + sx_4 = 0. \end{cases}$$

a) Opisać przestrzeń V układem równań liniowych.

b) Dla jakich wartości $s \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $\mathbf{R}^4 = V \oplus W_s$?

4. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ będzie układem wektorów przestrzeni liniowej V .

a) Wykazać, że układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z wektorów tego układu nie jest kombinacją liniową pozostałych.

b) Wykazać, że jeśli układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny i $\beta \in V$, to układ $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta$ jest liniowo zależny wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \in \operatorname{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

5.

a) Niech W będzie k wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech W_1, W_2 będą jej podprzestrzeniami takimi, że $W_1 \neq W_2$, $\dim W_1 = \dim W_2$ oraz $\dim(W_1 \cap W_2) = k - 2$. Wykazać, że $W = W_1 + W_2$.

b) Niech V_1, V_2, V_3 będą m wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni liniowej V takimi, że $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1 \cap V_3) = \dim(V_2 \cap V_3) = m - 1$. Wykazać, że $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3$ lub $\dim(V_1 + V_2 + V_3) = m + 1$.

c) Niech V_1, V_2, \dots będzie ciągiem m wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni liniowej V takim, że $\dim(V_i \cap V_j) = m - 1$ dla wszystkich $i \neq j$. Wykazać, że: (istnieje podprzestrzeń $W \subset V$ taka, że $\dim W = m - 1$ oraz $W \subset V_i$ dla każdego i) lub (istnieje podprzestrzeń $Z \subset V$ taka, że $\dim Z = m + 1$ oraz $V_i \subset Z$ dla każdego i).