GAL potok 1, kolokwium nr 2, 19.01.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.
Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat B

1. Rozpatrzmy podprzestrzenie $V_1, V_2 \subset \mathbf{R}^4$, $V_1 = \mathrm{lin}((1,1,0,2),(1,0,1,\mathrm{t}),(1,2,1,1))$, $V_2 = \mathrm{lin}((0,1,1,-1),(1,0,\mathrm{t},3))$.
a) Znaleźć $\dim(\mathrm{V}_1 + \mathrm{V}_2)$ oraz $\dim(\mathrm{V}_1 \cap \mathrm{V}_2)$ w zależności od $t \in \mathbf{R}$.
b) Niech $Z = V_1 + V_2$. Dla każdego $t \in \mathbf{R}$ znaleźć taką podprzestrzeń $W \subset \mathbf{R}^4$, że $\mathbf{R}^4 = Z \oplus W$.

2. Niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazach $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,2,0)\}, \mathcal{B} = \{(1,2),(1,3)\}$ macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ i niech $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ będzie zadane wzorem $\psi((y_1, y_2)) = (y_1 - y_2, y_1 + 2y_2)$.
a) Niech $\alpha \in \mathbf{R}^3$ będzie wektorem mającym w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne 2, 1, 1. Znaleźć współrzędne wektora $(\psi \circ \varphi)(\alpha)$ w bazie $\mathcal{C} = \{(0,1),(1,2)\}$.
b) Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ takie, że $\varphi \circ \varphi_1$ jest jednokładnością o skali 5.

3. a) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Obliczyć $\det A$.
b) Czy istnieje macierz $B \in M_{4\times 4}(\mathbf{R})$ o wyrazach całkowitych parzystych taka, że $\det B = 140$? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy. Jeśli nie, to uzasadnić dlaczego nie istnieje.

4. Niech $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym.
a) Wykazać, że φ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker(\varphi) = \{0\}$.
b) Niech $\dim \mathrm{V} = \mathrm{n}$, $\dim \mathrm{W} = \mathrm{m}$ oraz $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ będą bazami V i $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ będą bazami W. Wykazać, że istnieją macierze $C \in M_{n\times n}(K), D \in M_{m\times m}(K)$ takie, że
$$M(\varphi)_{\mathcal{A}'}^{\mathcal{B}'} = D \cdot M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \cdot C.$$

5. Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\dim \mathrm{V} = \mathrm{n}$. Dla każdej liczby naturalnej m niech $\varphi^m = \varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ (m krotne złożenie φ).
a) Wykazać, że dla każdego m zachodzi zawieranie $\mathrm{im}(\varphi^{\mathrm{m}+1}) \subset \mathrm{im}(\varphi^{\mathrm{m}})$.
b) Niech $n = 11$ i niech dla $1 \leq k \leq 4$ zachodzi $\mathrm{im}(\varphi^{\mathrm{k}+1}) \neq \mathrm{im}(\varphi^{\mathrm{k}})$. Wykazać, że $\dim \ker(\varphi) \leq 7$.
c) Wykazać, że jeśli $\varphi^3 = \varphi$, to $V = \ker(\varphi^2) \oplus \mathrm{im}(\varphi^2)$.