GAL, Kolokwium nr 2, Temat B
20 stycznia 2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu

Zadanie 1

Niech $V_1 = \mathrm{lin}((1,-1,0,-1),(t,2,2,1)$ oraz V_2 opisane układem równań

$$\begin{cases} \quad x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

będą podprzestrzeniami liniowymi $\mathbb{R}^4$. Znaleźć:

(a) wszystkie takie $t \in \mathbb{R}$, że $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$

(b) znaleźć bazę przestrzeni $V_1 + V_2$ w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2

Niech $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

(a) Znaleźć wzór na takie przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $\ker\varphi = W$ oraz $\varphi((1,1,1)) = (3,2)$.1)

(b) Niech $Z = \{\psi \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \quad | \quad \psi|_W : W \to W$ jest jednokładnością $\}$. Wykazać, że Z jest podprzestrzenią przestrzeni linowej $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ i obliczyć $\dim Z$.

Zadanie 3

Niech $\mathcal{A} = \{(2,-1),(1,-2)\}$ i $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ będą bazami przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ oraz niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

(a) Znaleźć współrzędne wektora $\varphi((6,-6))$ w bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem zdanym wzorem $\psi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + tx_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\psi \circ \varphi$ jest izomorfizmem?

Zadanie 4

Załóżmy, że $\varphi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym. Pokazać. że:

(a) φ jet monomorfizmem wtedy i tylko wtedy gdy $\ker\varphi = \{0\}$.

(b) $\dim\ker\varphi + \dim\mathrm{im}\varphi = \dim V$

Zadanie 5

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n.

(a) Pokazać, że istnienie przekształcenia liniowego $\varphi : V \to V$ oraz podprzestrzeni liniowej $W \subset V$ przestrzeni V spełniających warunek $\mathrm{im}(\varphi) = W = \ker(\varphi)$ jest równoważne temu, że $2\dim W = \dim V$.

(b) Pokazać, że jeżeli $\varphi : V \to V$ jest takim przekształceniem liniowym, że $\varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n-\text{razy}} = 0 \neq \varphi^{n-1}$, to istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$