GAL, kolokwium nr 2, 14.01.2005, Temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Niech V, W_t będą następującymi podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbf{R}^4$
$V = \mathrm{lin}((1,-1,-1,-1),(-3,4,0,1),(-5,6,2,3))$, $W_t = \mathrm{lin}((1,t,2,1),(2,2t,t,2))$.
a) Znaleźć układ równań liniowych opisujący V.
b) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ zachodzi $R^4 = V \oplus W_t$?

2. Niech $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem
$\varphi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (x_1+2x_2-x_3+3x_4, 2x_1+5x_2+x_3+7x_4, x_1+x_2-4x_3+2x_4)$.
a) Znaleźć bazę jądra przekształcenia φ
b) Niech $Z = \{\psi \in L(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^4) \mid \varphi \circ \psi \text{ jest przekształceniem zerowym}\}$.
Znaleźć wymiar przestrzeni Z.
Podać przykład (podając wzór) takiego przekształcenia liniowego $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^4$, że $\psi \in Z$ i rząd ψ wynosi 2.

3. Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $\mathcal{B} = \{\beta_1,\beta_2\}$ dla $\alpha_1 = (1,1,1), \alpha_2 = (1,2,3), \alpha_3 = (1,2,2)$, $\beta_1 = (1,1), \beta_2 = (1,2)$ oraz niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
a) Znaleźć $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$. Dla wektora $\alpha = 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3$ znaleźć współrzędne wektora $\varphi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$.
b) Niech $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem
$$M(\psi)_{\mathrm{st}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
Wykazać, że $\ker(\varphi \circ \psi)$ ma wymiar 1 i znaleźć bazę obrazu przekształcenia $\varphi \circ \psi$.

4. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad K i niech W_1, W_2 będą jej podprzestrzeniami. Wykazać, że $\dim(\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2) = \dim\mathrm{W}_1 + \dim\mathrm{W}_2 - \dim(\mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2)$.

5. Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi nad K, $\varphi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni V, $\mathcal{B} = \{\beta_1,\ldots,\beta_m\}$ będzie bazą przestrzeni W oraz niech $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Wykazać, że
a) φ jest epimorfizmem $\iff$ wiersze macierzy A tworzą układ liniowo niezależny,
b) φ jest monomorfizmem $\iff$ dla każdego przekształcenia liniowego $\psi_1 : V \to K$ istnieje przekształcenie liniowe $\psi_2 : W \to K$ takie, że $\psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$.