A

EGZAMIN POPRAWKOWY Z ALGEBRY LINIOWEJ, SEMESTR ZIMOWY 2002/2003

CZĘŚĆ I. ZADANIA

1. Przedstawić liczbę $\frac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}} \in \mathbb{C}$ w postaci $a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) Wyznaczyć i narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{|z+1+i|} = \frac{1}{|z-1-i|}\}$
2. Przedyskutować, w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, ilość rozwiązań następującego układu równań. W przypadku gdy istnieje więcej niż jedno rozwiązanie, opisać zbiór rozwiązań.
$$\begin{cases} x + ay + az = b \\ x + y + (a-1)z = 2b \\ 2x(a+1)y + (a-1)z = 2b \end{cases}$$
3. Niech $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie rzutem na podprzestrzeń $lin\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ wzdłuż podprzestrzeni $lin\{(0,1,0,1),(0,0,1,-1)\}$. Znaleźć bazę podprzestrzeni $f(V)$, gdzie $V = lin\{(1,5,3,3),(1,3,0,4)\}$.
4. Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ będą bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przekształceniem liniowym o macierzy $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ w bazach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$. Sprawdzić, że f jest izomorfizmem. Znaleźć macierz f^{-1} w bazie $\mathcal{B}$ wiedząc, że macierz przejścia z bazy $\mathcal{A}$ do bazy $\mathcal{B}$ jest równa $M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.
5. Niech $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ będą wektorami takimi, że lin$\{x, y, z\} = \mathbb{R}^2$. Wykazać, że jeżeli $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest przekształceniem liniowym takim, że $f(x) = y$, $f(y) = z$, $f(z) = x$, to zachodzi $x + y + z = 0$.

CZĘŚĆ II. TEORIA

1. Podaj definicję pierwiastka pierwotnego z jedynki stopnia $n \in \mathbb{N}$
2. Podaj definicję liniowej niezależności wektorów.
3. Podaj definicję podprzestrzeni przestrzeni liniowej.
4. Podaj definicję rzędu macierzy.
5. Sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capelli.
6. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Policz $\dim Im(f)$ wiedząc, że $\dim V = n$, $\dim W = m$ oraz $\dim \ker(f) = s$.
7. Sformułuj twierdzenie charakteryzujące kiedy macierz jest odwracalna.

Punktacja:
zadania z części I po 10 punktów
zadania z części II po 3 p.
Razem 71 p.