A

EGZAMIN Z ALGEBRY LINIOWEJ, SEMESTR ZIMOWY 2002/2003

CZĘŚĆ I. ZADANIA

1. (a) Znaleźć wszystkie $z \in \mathbb{C}$ spełniające równanie $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{4}{3+i}$
   (b) Wyznaczyć i narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{Im(z^2)-Re(z)+z} = -\frac{1}{\bar{z}}\}$

2. Przedyskutować, w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, ilość rozwiązań następującego układu równań. W przypadku gdy istnieje więcej niż jedno rozwiązanie, opisać zbiór rozwiązań.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ x - 3y + az = b \end{cases}$$

3. Niech $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie symetrią względem podprzestrzeni $lin\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ wzdłuż podprzestrzeni $lin\{(0,1,0,1),(0,0,1,-1)\}$. Znaleźć bazę podprzestrzeni $f(V)$, gdzie $V = lin\{(2,5,-1,4),(1,3,0,4)\}$

4. Niech $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ będą bazami przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz przejścia $M(id)_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ z bazy $\mathcal{B}_1$ do bazy $\mathcal{B}_2$ wiedząc, że

$$M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ oraz } M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. W przestrzeni endomorfizów End$(\mathbb{R}^3)$ rozważmy podzbiór

$$X = \{f \in \text{End}(\mathbb{R}^3) \mid \dim_{\mathbb{R}} Im(f) = 2\}.$$

   Uzasadnić, że:
   (a) dla dowolnych $f, g \in X$, $1 \leq \dim_{\mathbb{R}} Im(f \circ g) \leq 2$.
   (b) Wskazać przykłady endomorfizmów $f_i, g_i \in X$, $i = 1, 2$, takich że $\dim_{\mathbb{R}} Im(f_i \circ g_i) = i$

CZĘŚĆ II. TEORIA

1. Podaj definicję pierwiastka pierwotnego z jedynki stopnia $n \in \mathbb{N}$
2. Podaj definicję liniowej niezależności wektorów.
3. Podaj definicję podprzestrzeni przestrzeni liniowej.
4. Podaj definicję rzędu macierzy.
5. Sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capelli.
6. Niech $f\colon V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Policz $\dim Im(f)$ wiedząc, że $\dim V = n$, $\dim W = m$ oraz $\dim \ker(f) = s$.
7. Sformułuj twierdzenie charakteryzujące kiedy macierz jest odwracalna.

Punktacja:
zadania z części I po 10 punktów
zadania z części II po 3 p.
Razem 71 p.