EGZAMIN POPRAWKOWY Z ALGEBRY LINIOWEJ, SEMESTR ZIMOWY 2001/2002

CZĘŚĆ I. ZADANIA

1. Przedstawić liczbę $(1+i)^{111}$ w postaci $a+bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

2. (a) Przedyskutować, w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, ilość rozwiązań następującego układu równań. W przypadku gdy istnieje więcej niż jedno rozwiązanie, opisać te rozwiązania.

$$\begin{cases} x+2y+z=2b \\ x+ay+z=2b \\ ax+y+z=b \end{cases}$$

(b) Niech $V_a \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie podprzestrzenią złożoną ze wszystkich rozwiązań układu: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{cases}$

Czy istnieją parametry $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ takie, że $V_{a_1}+V_{a_2}+V_{a_3}=\mathbb{R}^3$? Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech $V = lin\{(1,2,0,1),(0,1,0,1),(1,0,0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ oraz $W = lin\{(1,0,0,1),(2,1,1,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
(a) Czy istnieje przekształcenie liniowe $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takie, że $f(W)=V$, jeżeli tak, to znaleźć wzór na f.
(b) Napisać układ równań, którego rozwiązaniem jest podprzestrzeń V.

4. Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem danym wzorem $f(x,y)=(x+2y, x-y, x-2y)$, oraz $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ w bazie standardowej.
(a) Znaleźć wymiar Im$(f \circ g)$ oraz bazę ker$(f \circ g)$.
(b) Znaleźć macierz $f \circ g$ w bazie standardowej.
(c) Znaleźć macierz $f \circ g$ w bazie $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$

5. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ będą macierzami takimi, że $AB=C$ jest macierzą odwracalną. Wykazać, że wówczas A i B są macierzami odwracalnymi. Wyrazić macierz C^{-1} przy pomocy macierzy A^{-1} i B^{-1}.

CZĘŚĆ II. TEORIA

1. Co to jest pierwiastek pierwotny z jedynki stopnia $n \in \mathbb{N}$.

2. Podaj definicję liniowej niezależności wektorów.

3. Podaj definicję podprzestrzeni przestrzeni liniowej.

4. Podaj definicję rzędu macierzy.

5. Podaj definicję wyznacznika z macierzy.

6. Sformułuj twierdzenie Kramera.

7. Podaj definicję przekształcenia liniowego.

Punktacja:
zadania z części I po 10 punktów
zadania z części II po 3 p.
Razem 71p.