A

EGZAMIN Z ALGEBRY LINIOWEJ, SEMESTR ZIMOWY 2001/2002

CZĘŚĆ I. ZADANIA

1. (a) Znaleźć wszystkie zespolone pierwiastki równania $z^3 = -8i$
   (b) Wyznaczyć i narysować zbiór $\{z \in \mathbb{C} \mid Im(\frac{1}{z-1}) < 1\}$

2. (a) Przedyskutować, w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, ilość rozwiązań następującego układu równań. W przypadku gdy istnieje więcej niż jedno rozwiązanie, opisać te rozwiązania.

$$\begin{cases} x + ay + z = b \\ ax + y + z = 2b \\ 2x + y + z = 2b \end{cases}$$

   (b) Niech $V_a \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie podprzestrzenią złożoną ze wszystkich rozwiązań układu: $\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$
   Czy istnieją parametry $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ takie, że $V_{a_1} + V_{a_2} + V_{a_3} = \mathbb{R}^3$? Odpowiedź uzasadnić.

3. Niech $V = lin\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$ oraz $W = lin\{(1, 0, 0, 1), (2, 1, 1, -1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
   (a) Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ takie, że $f(V) = W$.
   (b) Napisać układ równań, którego rozwiązaniem jest podprzestrzeń W.

4. Niech $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem danym wzorem $f(x, y) = (x + 2y, x - y, x - 2y)$, oraz $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ przekształceniem liniowym o macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ w bazie standardowej.
   (a) Znaleźć bazę Imf oraz bazę ker$g$.
   (b) Znaleźć macierz $g \circ f$ w bazie standardowej.
   (c) Znaleźć macierz $g \circ f$ w bazie $(1, 3), (1, 4)$

5. Niech f, g będą endomorfizmami skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V. Wykazać, że jeżeli $f \circ g$ jest automorfizmem V, to f i g są też automorfizmami V.

CZĘŚĆ II. TEORIA

1. Podaj wzór de Moivre'a.

2. Podaj definicję liniowej niezależności wektorów.

3. Podaj definicję podprzestrzeni przestrzeni liniowej.

4. Podaj definicję rzędu macierzy.

5. Podaj definicję wyznacznika z macierzy.

6. Sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capelli.

7. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n$ będzie bazą przestrzeni liniowej V i $0 \neq w \in V$. Wykazać, że istnieje $1 \leq i \leq n$ takie, że wektory $v_1, v_2, \ldots v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_n$ tworzą bazę V.

Punktacja:
zadania z części I po 10 punktów
zadania z części II po 3 p. ostatnie 7p.
Razem 75 p.