Rozwiązania zadań z kolokwium z GALu II, 30 kwietnia 2020 r.

Zadanie 1. *Znajdź wszystkie takie $s, t \in \mathbb{Z}_5$, że macierz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 2 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

jest diagonalizowalna nad ciałem pięcioelementowym $\mathbb{Z}_5$.

Rozwiązanie. Niech $\phi : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^3$ będzie endomorfizmem takim, że $M(\phi)_{st}^{st} = A$. Teza jest równoważna wskazaniu takich $s, t \in \mathbb{Z}_5$, dla których endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny, czyli istnieje baza $\mathbb{Z}_5^3$ złożona z wektorów własnych ϕ. Wielomian charakterystyczny ϕ równy jest wielomianowi charakterystycznemu macierzy dolnotrójkątnej A, czyli $w_\phi(\lambda) = w_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) \in \mathbb{Z}_5[\lambda]$. A zatem ϕ ma wartości własne $1, 2$. Mają one odpowiednio krotności algebraiczne 2 oraz 1. A zatem $V_{(2)}$ jest wymiaru 1. Aby ϕ było diagonalizowalne potrzeba zatem i wystarcza, by $V_{(1)}$ była wymiaru 2. Mamy:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 \end{bmatrix}$$

Układ równań dany powyższą macierzą ma przestrzeń rozwiązań $V_{(1)}$ wymiaru 2 wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A-I) = 1$. Jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy $st = 1$. A zatem szukane pary $(s,t) \in \mathbb{Z}_5^2$, dla których macierz A jest diagonalizowalna to:

$$(1,1), (2,3), (3,2), (4,4).$$

■

Zadanie 2. *Wyznacz macierz* $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{2020}$.

Rozwiązanie. Niech $A = \left[\begin{smallmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{smallmatrix}\right] \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Wielomian charakterystyczny macierzy A równy jest

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(-1-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 6\lambda - 16 = (\lambda+2)(\lambda-8).$$

A zatem macierz A jest podobna do macierzy diagonalnej mającej na przekątnej -2 oraz 8:

$$A = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot P,$$

przy czym macierz P^{-1} zawiera w kolumnach wektory własne o wartościach własnych $-2, 8$. Co więcej:

$$A^{2020} = \left(P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot P\right)^{2020} = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2^{2020} & 0 \\ 0 & 8^{2020} \end{bmatrix} \cdot P.$$

Mamy:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A - 8I = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno zatem widzieć, że wektorem własnym A o wartości własnej -2 jest na przykład $(1, -3)$, zaś wektorem o wartości własnej 8 jest $(3, 1)$. Zatem:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Zadanie 3. *Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ spełnia równanie $A^2 = I$. Pokaż jest to macierz diagonalizowalna. Jakie wartości własne może mieć ta macierz?*

Rozwiązanie. Każdą kwadratową macierz zespoloną można sprowadzić do postaci Jordana. Niech J będzie macierzą w postaci Jordana podobną do A. Wówczas istnieje macierz odwracalna P taka, że $P^{-1}AP = J$. A zatem $J^2 = P^{-1}A^2P = P^{-1}P = I$. Oznacza to, że każda z klatek Jordana macierzy J po podniesieniu do kwadratu jest macierzą identyczności. Załóżmy, że w J istnieje klatka rozmiaru co najmniej 2×2 odpowiadająca wartości własnej a. Wówczas:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

A zatem dostajemy warunki: $a^2 = 1$ oraz $2a = 0$, co oznacza, że powyższe równanie macierzowe jest sprzeczne. Wszystkie klatki Jordana J są zatem rozmiaru 1×1, a zatem A jest diagonalizowalna. Oczywiście jeśli $a \in \mathbb{C}$ jest wartością własną A, to a^2 jest wartością własną I, a zatem $a^2 = 1$. Równanie to ma w liczbach zespolonych jedynie pierwiastki -1 oraz 1. To jedyne możliwe wartości własne macierzy A. ■

Zadanie 4. *Które z poniższych czterech macierzy są podobne nad $\mathbb{C}$?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Wiemy, że macierze podobne muszą mieć taki sam rząd. Oczywiscie $r(A) = r(C) = r(D) = 2$, zaś $r(B) = 1$. A zatem szukana para macierzy podobnych może być jedynie wśród trójki A, C, D. Policzmy ich wielomiany charakterystyczne. Mamy $w_A(\lambda) = w_C(\lambda) = \lambda^4$, zaś $w_D = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$. Pozostaje zatem sprawdzić czy macierze A oraz C są podobne. Porównamy ich postaci Jordana. Kwadraty macierzy A i C są zerowe, a zatem $r(A^0) - r(A^1) = 2$, $r(A^1) - r(A^2) = 2$, $r(A^2) - r(A^3) = 0$, podobnie $r(C^0) - r(C^1) = 2$, $r(C^1) - r(C^2) = 2$, $r(C^2) - r(C^3) = 0$. Postaci Jordana zarówno A jak i C mają zatem po 2 klatki rozmiarów 2×2 odpowiadające wartości własnej 0. Z tw. Jordana A i C są zatem podobne. ■

Zadanie 5. *Wyznacz bazę $\mathcal{J}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz $M(\phi)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}$ endomorfizmu $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ danego wzorem $\phi(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2 - x_3)$ ma postać Jordana.*

Rozwiązanie. Niech $A = M(\phi)_{st}^{st}$. (Obliczamy wielomian charakterystyczny endomorfizmu ϕ:

$$w_\phi(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)((\lambda+3)(\lambda-1)+4) = -(\lambda+1)^3.$$

A zatem w_ϕ rozkłada się na czynniki liniowe i na mocy tw. Jordana istnieje baza $\mathcal{J}$ taka, że $M(\phi)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}$ jest w postaci Jordana. Mamy

$$A + I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

a zatem $r(A + I) = 1$, czyli są dwie klatki rozmiaru przynajmniej 1×1 odpowiadające wartości własnej -1. Muszą to być zatem klatki rozmiaru 1×1 oraz 2×2. Zatem postać Jordana J macierzy A to:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Szukamy wektorów $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ takich, że $\phi(\beta_1) = -\beta_1$, $\phi(\beta_2) = -\beta_2$ oraz $\phi(\beta_3) = \beta_2 - \beta_3$. Zatem $\beta_1, \beta_2 \in \ker(\phi + \mathrm{id})$ oraz $\beta_3 \in \ker(\phi + \mathrm{id})^2 \setminus \ker(\phi + \mathrm{id})$. Zaproponujmy najpierw najpierw β_3.

Przestrzeń $V_{(-1)}$ rozpięta jest przez $(-1,1,0),(0,0,1)$. A zatem $\ker(\phi+\mathrm{id}) = \mathrm{lin}((-1,1,0),(0,0,1))$. Oczywiście $\ker(\phi+\mathrm{id})^2 = \mathbb{R}^3$, bo $(A+I)^2 = 0$. Weźmy dowolny wektor β_3, który nie jest z $V_{(-1)}$, np. $(0,1,0)$. Wyznaczamy β_2 z warunku:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Kładziemy $\beta_2 = (-2,2,3)$ i szukamy wektora β_1, który dopełnia β_2 do bazy $V_{(-1)}$. Jest to na przykład $\beta_1 = (0,0,1)$. Wyznaczyliśmy bazę $\mathcal{J} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, w której endomorfizm ϕ ma macierz Jordana J. ■

Zadanie 6. *Niech ϕ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Czy wynika stąd, że istnieją niezerowe podprzestrzenie ϕ-niezmiennicze V, W takie, że $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$?*

Rozwiązanie. NIE. Rozważmy endomorfizm ϕ zadany w bazie standardowej macierzą w postaci Jordana

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Niech V będzie podprzestrzenią ϕ-niezmienniczą i niech $(x_1,x_2,x_3) \in V$. Wówczas $\phi(x_1,x_2,x_3) = (x_2,x_3,0) \in V$, a więc także $\phi(x_2,x_3,0) = (x_3,0,0) \in V$. A zatem wszystkie podprzestrzenie ϕ-niezmiennicze zawierające wektory o pierwszej lub drugiej współrzędnej niezerowej zawierają wektor $(1,0,0)$. Ale poza nimi jest tylko jedna niezerowa podprzestrzeń ϕ-niezmiennicza $\mathrm{lin}((1,0,0))$. A zatem każda niezerowa podprzestrzeń ϕ-niezmiennicza zawiera $(1,0,0)$. A zatem nie istnieją niezerowe podprzestrzenie ϕ-niezmiennicze takie, że V, W takie, że $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$. W zasadzie pokazaliśmy, że ϕ ma w ogóle dwie niezerowe podprzestrzenie ϕ-niezmiennicze. Jakie?

Istnieje też bardziej wyrafinowany powód. Otóż wielomianu charakterystycznego ϕ równego $-\lambda^3$ nie da się rozłożyć na dwa „względnie pierwsze" wielomiany stopnia równego co najmniej 1. A właśnie istnienie takiego rozkładu gwarantuje istnienie wspomnianych podprzestrzeni ϕ-niezmienniczych. ■

Zadanie 7. *Niech $(V, \langle\,,\,\rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową oraz niech $\mathcal{A}$ będzie takim liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni V, że macierz Grama $G(\mathcal{A})$ ma jedynie wyrazy równe 0 lub 1. Pokazać, że $G(\mathcal{A})$ jest wówczas macierzą identycznościową.*

Rozwiązanie. Niech $\mathcal{A} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ oraz $G(\mathcal{A}) = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. Oczywiście mamy $a_{ii} = 1$, dla $i = 1,\ldots,k$, bo macierz iloczynu skalarnego nie może mieć na przekątnej zerowych elementów. Załóżmy wbrew tezie, że $a_{rs} \neq 0$, dla pewnych $r \neq s$. A zatem $a_{rs} = a_{sr} = 1$. Oznacza to, że macierz Grama układu $\mathcal{A}' = (\alpha_r, \alpha_s)$ ma postać $G(\mathcal{A}') = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, czyli jest macierzą nieodwracalną. To oznacza, że układ $\mathcal{A}'$ jest liniowo zależny. To przeczy wyborowi układu $\mathcal{A}$. A zatem $a_{ij} = 0$, dla $i \neq j$. ■

Zadanie 8. *Rozpatrzmy funkcję $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ daną wzorem*

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = (4-r)x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + rx_3y_3.$$

Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ funkcja f jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ funkcja $f|_W$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $W = \mathrm{lin}((1,1,-1),(0,1,1))$?

Rozwiązanie. Podana funkcja jest dwuliniowa i symetryczna, a zatem możemy zastosować kryterium Sylvestera. Bierzemy bazę standardową $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i piszemy macierz o wyrazach $f(\epsilon_i,\epsilon_j)$ postaci:

$$\begin{bmatrix} 4-r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r \end{bmatrix}.$$

Aby macierz ta była macierzą Grama potrzeba i wystarcza, aby:

$$4-r > 0, \qquad \begin{vmatrix} 4-r & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} > 0, \qquad \text{oraz} \qquad \begin{vmatrix} 4-r & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & r \end{vmatrix} > 0.$$

A zatem dostajemy układ warunków:

$$4 > r, \quad 3 > r, \quad -r^2 + 4r - 3 = -(r-1)(r-3) > 0.$$

Stąd f jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r \in (1,3)$.

Dla sprawdzenia punktu drugiego bierzemy $\alpha_1 = (1,1,-1)$ oraz $\alpha_2 = (0,1,1)$. Wyznaczamy macierz o wyrazach $f(\alpha_i, \alpha_j)$. Ma ona postać:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3-r \\ 3-r & 3+r \end{bmatrix}.$$

A zatem jest ona macierzą Grama wtedy i tylko wtedy, gdy $3(3+r) - (3-r)^2 > 0$, co daje $-r^2 + 9r > 0$, czyli $r(9-r) > 0$. A zatem w tym przypadku $r \in (0,9)$. ■

Zadanie 9. *Macierz A pewnej izometrii przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym ma ślad równy -2. Wykaż, że izometria ta jest złożeniem obrotu i pewnej symetrii prostopadłej.*

Rozwiązanie. Izometria przestrzeni $\mathbb{R}^3$, jak każdy endomorfizm rzeczywistej przestrzeni nieparzystego wymiaru, ma wartość własną (bo wielomian charakterystyczny tej izometrii jest nieparzystego stopnia). Musi ona wynosić 1 lub -1. Niech α będzie wektorem własnym tej izometrii o normie 1. Dopełniamy α do bazy ortonormalnej (α, β, γ) przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Zauważmy, że $\mathrm{lin}(\beta, \gamma)$ jest niezmiennicza względem tej izometrii. Inaczej jakiś niezerowy wektor z tej przestrzeni przechodziłby na niezerowy wektor, który nie jest prostopadły do α, co jest niemożliwe. Zatem w tej bazie macierz naszej izometrii ma postać:

$$B = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix}.$$

Co więcej B jest macierzą w bazie ortonormalnej, a zatem jest to macierz ortogonalna. Jest to też macierz podobna do A, a więc $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) = -2$. W szczególności widać też, że $B' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jest ortogonalna. A zatem jest to, jak wiemy z wykładu, macierz symetrii lub obrotu. Rozważamy te dwa przypadki.

- Jeśli B' jest macierzą symetrii, to jest ona diagonalizowalna w pewnej bazie, a więc cała macierz B jest diagonalizowalna i ma wartości własne 1 lub -1. To jest jednak niemożliwe, bo suma tych liczb nigdy nie daje -2.
- Jeśli B' jest macierzą obrotu, to $a = d = \cos\theta$, dla pewnego θ. A zatem ślad macierzy B to $2\cos\theta \pm 1 = -2$. A zatem wartość własna, której znaku nie znaliśmy to -1 i mamy $\cos\theta = -1/2$. A zatem B jest postaci:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ 0 & \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  a więc nasza izometria to złożenie symetrii prostopadłej względem $\mathrm{lin}(\beta, \gamma)$ oraz obrotu o kąt $\pm 2\pi/3$ w przestrzeni $\mathrm{lin}(\beta, \gamma)$ wokół $\mathrm{lin}(\alpha)$.

■

Zadanie 10. *Znajdź rzeczywistą macierz ortogonalną P taką, że macierz $P^T AP$ jest diagonalna, gdzie*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie. Rozważmy przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym i niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem samosprzężonym zadanym w bazie standardowej macierzą A. Wyznaczymy bazę ortonormalną $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych ϕ. Te właśnie wektory stanowić będą kolumny macierzy P, która w ten sposób (jako macierz w bazach ortonormalnych) będzie ortogonalna, a więc $P^T = P^{-1}$. Wielomian charakterystyczny endomorfizmu ϕ to:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 25\lambda = -\lambda(\lambda - 5)(\lambda + 5).$$

Nietrudno widzieć, że $V_{(0)} = \mathrm{lin}((4,0,-3)), V_{(5)} = \mathrm{lin}((3,5,4))$ oraz $V_{(-5)} = \mathrm{lin}((3,-5,4))$. Wektory rozpinające te podprzestrzenie są oczywiście prostopadłe w standardowym iloczynie skalarnym. Normalizując te wektory dostajemy szukane kolumny macierzy P, złożone z wektorów:

$$\frac{(4,0,-3)}{\|(4,0,-3)\|} = \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right), \quad \frac{(3,5,4)}{\|(3,5,4)\|} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}\right), \quad \frac{(3,-5,4)}{\|(3,-5,4)\|} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}\right).$$

■

Zadanie 11. *Niech* $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \,\rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową. Wykaż, że miara* 2*-wymiarowa równoległoboku rozpiętego przez wektory* $(1,0)$ *oraz* $(0,1)$ *równa jest mierze* 2*-wymiarowej równoległoboku rozpiętego przez wektory* $(1,0)$ *oraz* $(1,1)$.

Rozwiązanie. Zgodnie z twierdzeniem z wykładu miara 2-wymiarowa równoległościanu rozpiętego przez wektory α, β równa jest $\|\alpha\| \cdot \|\beta'\|$, gdzie β' jest rzutem β na $\mathrm{lin}(\alpha)^\perp$, a zatem

$$\beta' = \beta - \frac{\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha.$$

Niech R_1 będzie równoległościanem rozpiętym przez wektory $(1,0)$, $(0,1)$, zaś niech R_2 będzie równoległościanem rozpiętym przez wektory $(1,0), (1,1)$. Wówczas:

$$\mu_2(R_1) = \|(1,0)\| \cdot \|(0,1) - \frac{\langle (0,1),(1,0) \rangle}{\langle (1,0),(1,0) \rangle}(1,0)\|.$$

$$\mu_2(R_2) = \|(1,0)\| \cdot \|(1,1) - \frac{\langle (1,1),(1,0) \rangle}{\langle (1,0),(1,0) \rangle}(1,0)\|.$$

A zatem wystarczy sprawdzić, że $\|(0,1) - \frac{\langle (0,1),(1,0) \rangle}{\langle (1,0),(1,0) \rangle}(1,0)\| = \|(1,1) - \frac{\langle (1,1),(1,0) \rangle}{\langle (1,0),(1,0) \rangle}(1,0)\|$. Równość ta jest jednak równoważna równości:

$$\|\langle (1,0),(1,0) \rangle(0,1) - \langle (0,1),(1,0) \rangle(1,0)\| = \|\langle (1,0),(1,0) \rangle(1,1) - \langle (1,1),(1,0) \rangle(1,0)\|.$$

Korzystając z dwuliniowości widzimy, że $\langle (1,0),(1,0) \rangle(1,1) - \langle (1,1),(1,0) \rangle(1,0)$ równe jest

$$\langle (1,0),(1,0) \rangle(1,0) + \langle (1,0),(1,0) \rangle(0,1) - \langle (1,0),(1,0) \rangle(1,0) - \langle (0,1),(1,0) \rangle(1,0)$$

co po uproszczeniu daje $\langle (1,0),(1,0) \rangle(0,1) - \langle (0,1),(1,0) \rangle(1,0)$.

■

Zadanie 12. *Niech układ* $(v_1, ..., v_n)$ *będzie bazą zorientowanej przestrzeni euklidesowej* $(V, \langle,\rangle)$*. Ile jest zachowujących orientację izometrii* $\phi : V \to V$ *takich, że* $\phi(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)$ *dla wszystkich* $i = 1, ..., n$*?*

Rozwiązanie. Niech $(v_1', \ldots, v_n')$ będzie bazą ornonormalną $(V, \langle,\rangle)$ uzyskaną poprzez ortogonalizację Grama-Schmidta. Wówczas $\mathrm{lin}(v_1, \ldots, v_i) = \mathrm{lin}(v_1', \ldots, v_i')$, dla każdego $i = 1, \ldots, n$. A zatem $\phi(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)$ jest równoważny z warunkiem $\phi(\mathrm{lin}(v_1', ..., v_i')) = \mathrm{lin}(v_1', ..., v_i')$ i możemy od początku założyć, że baza $(v_1', \ldots, v_n')$ jest ortogonalna.

Policzymy najpierw wszystkie izometrie takie, że $\phi(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)$, dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$, przy czym $(v_1, \ldots, v_n)$ jest bazą ortonormalną. Wykażemy przez indukcję po n, że izometrii tych jest 2^n. Dla $n = 1$ mamy $\phi(v_1) = v_1$ lub $\phi(v_1) = -v_1$, bo ϕ zachowuje normę wektora. Przechodzimy do kroku indukcyjnego. Weźmy dowolną izometrię $(V, \langle,\rangle)$ spełniającą warunki $\phi(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)$, dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$, i obetnijmy ją do podprzestrzeni $W = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_{n-1})$. Zgodnie z założeniem $\phi(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_{n-1})) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_{n-1})$ obcięcie $\phi|_W$ jest „na". Jego jądro jest niezerowe, bo jądro ϕ jest niezerowe. Oczywiscie $\phi|_W$ zachowuje długość, więc to izometria. Co więcej, $\phi|_W(v_1, \ldots, v_i) = (v_1, \ldots, v_i)$, dla $i = 1, \ldots, n-1$. A zatem z założenia indukcyjnego wiemy, że $\phi|_W$ można wybrać na 2^{n-1} sposobów. Zauważmy teraz, że $\phi(v_n) \notin W$, bo $v_n \in W^\perp$, skoro baza $(v_1, \ldots, v_n)$ jest ortonormalna. A zatem $\phi(v_n) = v_n$ lub $\phi(v_n) = -v_n$. A zatem mamy 2^n izometrii $(V, \langle,\rangle)$ spełniających warunek $\phi(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)$, dla $i = 1, \ldots, n$. Krok indukcyjny jest zakończony.

Każda izometria przestrzeni zorientowanej $(V, \langle,\rangle)$ zachowuje orientację lub jej nie zachowuje. Co więcej, każdej izometrii ϕ_1 spełniającej warunek $\phi_1(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)$, dla $i = 1, \ldots, n$ zachowującej orientację $(V, \langle,\rangle)$ odpowiada dokładnie jedna izometria ϕ_2, która spełnia warunek $\phi_2(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)$, dla $i = 1, \ldots, n$ i nie zachowuje orientacji. Wystarczy żądać, by $\phi_1(v_i) = \phi_2(v_i)$, dla $i = 1, \ldots, n-1$ oraz $\phi_2(v_n) = -\phi_1(v_n)$. A zatem liczba izometrii $(V, \langle,\rangle)$ spełniających warunek $\phi(\mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)) = \mathrm{lin}(v_1, ..., v_i)$, dla $i = 1, \ldots, n$ wynosi 2^{n-1}. ■