

TEST Kolokwium 2 GAL II, 22 maja 2025

1. (5 pkt) Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ będzie ortonormalnym układem wektorów w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Udowodnij, że $\alpha = \langle \alpha, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \dots + \langle \alpha, \alpha_m \rangle \alpha_m$ dla dowolnego $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Wektor $v \in V$ spełnia $\|v\|^2 > \langle \alpha_1, v \rangle^2 + \langle \alpha_2, v \rangle^2 + \dots + \langle \alpha_m, v \rangle^2$. Czy możliwe aby $v \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$?

Rozwiązanie:

Niech $\alpha = a_1 \alpha_1 + \dots + a_m \alpha_m$ wówczas $\langle \alpha, \alpha_i \rangle = \langle a_1 \alpha_1 + \dots + a_m \alpha_m, \alpha_i \rangle = a_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = a_i$. Zatem $\alpha = \langle \alpha, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \dots + \langle \alpha, \alpha_m \rangle \alpha_m$. Jeśli $v \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, to $v = \langle v, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \dots + \langle v, \alpha_m \rangle \alpha_m$ oraz $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, \alpha_1 \rangle^2 + \dots + \langle v, \alpha_m \rangle^2$. Zatem $v \notin \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.

2. (5 pkt) Przestrzeń liniowa V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni: $V = W \oplus U$. Czy istnieją takie punkty $p, q \in V$, że podprzestrzenie afiniczne $p + W$ i $q + U$ są rozłączne? Czy istnieją takie punkty $p, q \in V$, że przecięcie $p + W$ i $q + U$ zawiera więcej niż jeden punkt?

Rozwiązanie:

Jeśli podprzestrzenie afiniczne $H, M \subset V$ są rozłączne to $T(H) + T(M) \neq V$. Zatem przecięcie przestrzeni $p + W$ oraz $q + U$ nie może być zbiorem pustym bo $W + U = V$. Przypuśćmy, że punkty r_1, r_2 należą do przecięcia $(p + W) \cap (q + U)$. Wówczas wektor $\overrightarrow{r_1 r_2}$ należy do przestrzeni stycznej $T(p + W) = W$ oraz do podprzestrzeni stycznej $T(q + U) = U$. Ale $W \cap U = \{0\}$. Zatem $r_1 = r_2$.

3. (5 pkt) Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą iloczynu skalarnego pewnej przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Czy istnieje odwracalna macierz $C \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że $A = C^T C$?

Rozwiązanie:

Tak, jeśli A jest macierzą iloczynu skalarnego to jest kongruentna do macierzy I_n . Zatem $A = C^T C$.

4. (5 pkt) Wektory α, β, γ należą do przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wiadomo, że wyznacznik macierzy Grama spełnia $W(\alpha, \beta, \gamma) = 4$. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory α, β, γ . Oblicz $W(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \gamma)$.

Rozwiązanie:

Objętość $R(\alpha, \beta, \gamma) = \sqrt{W(\alpha, \beta, \gamma)} = 2$. Wiemy, że $W(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \gamma) = (\det [\alpha + \beta \quad \alpha - \beta \quad \gamma])^2 = (\det [2\alpha \quad \alpha - \beta \quad \gamma])^2 = 4(\det [\alpha \quad -\beta \quad \gamma])^2 = 4(\det [\alpha \quad \beta \quad \gamma])^2 = 4 \cdot W(\alpha, \beta, \gamma) = 16$.

5. (5 pkt) Niech V będzie przestrzenią euklidesową, $f : V \rightarrow V$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń W , $g : V \rightarrow V$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń U oraz $U \subset W$. Czy $g \circ f = g$?

Rozwiązanie: TAK

Jeśli $U \subset W$, to $W^\perp \subset U^\perp$. Niech $v \in V$. Wówczas

$$v = u + u', \quad v = w + w'$$

gdzie $u \in U, u' \in U^\perp, w \in W, w' \in W^\perp$. Wiemy, że $g(v) = u, f(v) = w$, więc trzeba pokazać, że $g(w) = u$.

$$w = u + u' - w'$$

zatem $g(w) = u + g(u' - w') = u$ bo $u' - w' \in U^\perp$. Pokazaliśmy $g \circ f = g$.

6. (5 pkt) Dana jest macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$. Udowodnij, że dla każdej pary wektorów $v, w \in (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$ zachodzi $\langle w, Av \rangle = \langle A^T w, v \rangle$.

Rozwiązanie:

$$\langle w, Av \rangle = w^T Av = (w^T Av)^T = v^T A^T w = \langle v, A^T w \rangle = \langle A^T w, v \rangle$$

Kolokwium 2 GAL II, 22 maja 2025

1. Niech forma dwuliniowa $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie określona macierzą

$$G(h_t, st) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (5 pkt) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma jest iloczynem skalarnym?
- (5 pkt) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma obcięta do podprzestrzeni $U = \text{lin}((11, 3, 0), (8, 1, 0))$ jest iloczynem skalarnym?
- (5 pkt) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $h_t((1, 0, 0), (0, 0, 1)) = 0$? Dla $t = 2$ uzupełnij układ $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ do bazy prostopadłej przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, h_2)$.
- (5 pkt) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, h_2)$ znajdź odległość między prostymi

$$L = (1, 1, 2) + \text{lin}((1, 0, 0)), \quad K = (1, 2, 2) + \text{lin}((0, 0, 1))$$

Rozwiązanie:

(a)

Stosujemy kryterium Sylwestera:

$$2 > 0, \quad 2t - 1 > 0, \quad 4t - 4 > 0$$

Zatem forma jest iloczynem skalarnym dla $t > 1$.

(b)

Zauważmy, że $U = \text{lin}((11, 3, 0), (8, 1, 0)) = \text{lin}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$. Zatem

$$G((h_t)|_U, ((1, 0, 0), (0, 1, 0))) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

ponieważ U jest rozpinana przez pierwsze dwa wektory z bazy standardowej. Zatem h_t obcięte do U jest iloczynem skalarnym dla $t > \frac{1}{2}$.

(c)

Wektory $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$ są prostopadłe dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$, bo z macierzy $h_t((1, 0, 0), (0, 0, 1)) = 0$. Niech $t = 2$. Szukamy wektora $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ takiego, że $h_2((1, 0, 0), (x, y, z)) = 0$ i $h_2((x, y, z), (0, 0, 1)) = 0$. Dostajemy dwa równania

$$2x + y = 0, \quad y + 2z = 0$$

i szukanym wektorem jest na przykład $(1, -2, 1)$.

(d)

Z poprzedniego podpunktu mamy $(T(L) + T(K))^\perp = \text{lin}((1, -2, 1))$. Dowolny wektor łączący proste L i K , na przykład

$$(1, 2, 2) - (1, 1, 2) = (0, 1, 0)$$

rzutujemy prostopadłe na $\text{lin}((1, -2, 1))$:

$$\frac{h_2((0, 1, 0), (1, -2, 1))}{h_2((1, -2, 1), (1, -2, 1))}(1, -2, 1) = \frac{-2}{4}(1, -2, 1)$$

i liczymy jego długość:

$$\sqrt{h_2\left(\frac{-1}{2}(1, -2, 1), \frac{-1}{2}(1, -2, 1)\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{h_2((1, -2, 1), (1, -2, 1))} = 1$$

2. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są płaszczyzny

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_4 = 4, \quad x_3 + x_4 = 2\}$$

$$M = (1, 0, 2, 0) + \text{lin}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$$

- (5 pkt) Znajdź bazę prostopadłą przestrzeni $T(H) + T(M)$. Otrzymaną bazę uzupełnij do bazy prostopadłej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.
- (5 pkt) Niech $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem prostopadłym na M . Udowodnij, że $f(3, 0, 1, 1) = (1, 0, 2, 0)$. Niech $K = f(H)$. Udowodnij, że K jest prostą i znajdź parametryzację tej prostej.
- (5 pkt) Znajdź odległość $\rho(H, M)$ pomiędzy płaszczyznami H i M .
- (5 pkt) Udowodnij, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $\rho(k, H) = \rho(M, H)$.

Rozwiązanie:

(a)

$T(M) = \text{lin}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$ oraz $T(H) = \text{lin}((0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -1))$ zatem baza prostopadła przestrzeni $T(H) + T(M)$ to

$$(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, -1)$$

Wektor prostopadły do tego układu to na przykład $(2, 0, -1, 1)$.

(b)

Rzut prostopadły na M spełnia:

$$f((1, 0, 2, 0)) = (1, 0, 2, 0), \quad f'((0, 1, 0, 0)) = (0, 1, 0, 0), \quad f'((0, 0, 1, 1)) = (0, 0, 1, 1),$$

$$f'((1, 0, 1, -1)) = (0, 0, 0, 0), \quad f'((2, 0, -1, 1)) = (0, 0, 0, 0)$$

Zatem

$$f(3, 0, 1, 1) = f(1, 0, 2, 0) + f'(2, 0, -1, 1) = (1, 0, 2, 0)$$

Zauważmy, że $(3, 0, 1, 1) \in H$ oraz

$$H = (3, 0, 1, 1) + \text{lin}((0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -1))$$

Zatem $f((3, 0, 1, 1) + a(0, 1, 0, 0) + b(1, 0, 1, -1)) = (1, 0, 2, 0) + af'(0, 1, 0, 0) + bf'(1, 0, 1, -1) = (1, 0, 2, 0) + a(0, 1, 0, 0)$ czyli

$$K = f(H) = (1, 0, 2, 0) + \text{lin}((0, 1, 0, 0))$$

jest prostą.

Można oczywiście policzyć wzór rzutu:

$$f(a, b, c, d) = (1, b, \frac{c+d}{2} + 1, \frac{c+d}{2} - 1)$$

i z niego skorzystać.

(c)

Skorzystamy z podpunktu (b). Mamy $(3, 0, 1, 1) \in H$, $(1, 0, 2, 0) \in M$ oraz wektor łączący te punkty

$$(2, 0, -1, 1) \perp T(H) + T(M)$$

Tak więc rzut prostopadły wektora $(2, 0, -1, 1)$ na $(T(H) + T(M))^\perp$ jest równy wektorowi $(2, 0, -1, 1)$. Zatem

$$\rho(H, M) = \|(2, 0, -1, 1)\| = \sqrt{6}$$

(d)

Wystarczy pokazać, że dla każdego punktu $k \in K$ zachodzi $k + (2, 0, -1, 1) \in H$. Mamy

$$(1, t, 2, 0) + (2, 0, -1, 1) = (3, t, 1, 1) \in H$$

Można też policzyć odległość punktu $k = (1, t, 2, 0)$ od płaszczyzny H . Wektor $(1, t, 2, 0) - (3, 0, 1, 1) = (2, t, 1, -1)$ rzutujemy na przestrzeń $T(H)^\perp = \text{lin}((2, 0, -1, 1), (0, 0, 1, 1))$ i liczymy długość tego rzutu. Ale

$$(2, t, 1, -1) = (2, 0, 1, -1) + (0, t, 0, 0)$$

Wektor $(0, t, 0, 0) \in T(H)$ zatem jest prostopadły do $T(H)^\perp$. Zatem rzutem wektora $(2, t, 1, -1)$ na $T(H)^\perp$ jest wektor $(2, 0, 1, -1)$ i jego długość wynosi $\sqrt{6}$.

3. Rzeczywista przestrzeń liniowa V ma dwa iloczyny skalarne $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ spełniające

$$\langle u, v \rangle_1 = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad \langle u, v \rangle_2 = 0$$

- (8 pkt) Udowodnij, że $\|u\|_1 = \|v\|_1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\|u\|_2 = \|v\|_2$.
- (12 pkt) Udowodnij, że istnieje $c > 0$ takie, że dla wszystkich $u, v \in V$ zachodzi $\langle u, v \rangle_1 = c \cdot \langle u, v \rangle_2$

Rozwiązanie:

(a)

Wystarczy skorzystać z faktu, że

$$\|v\| = \|w\| \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad v + w \perp v - w$$

(b)

Niech $\beta_1, \dots, \beta_n$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$. Wówczas z podpunktu (a) istnieje takie $a > 0$, że

$$\|\beta_i\|_2 = a$$

dla każdego $i = 1, \dots, n$. Z założenia dla każdej pary $i \neq j$

$$\langle \beta_i, \beta_j \rangle_2 = 0$$

Niech $v = x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n$ oraz $w = y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n$. Wówczas

$$\langle v, w \rangle_1 = x_1y_1 + \dots + x_ny_n, \quad \text{oraz} \quad \langle v, w \rangle_2 = x_1y_1a^2 + \dots + x_ny_na^2$$

Zatem

$$\langle u, v \rangle_1 = a^2 \cdot \langle u, v \rangle_2$$