
Imię i nazwisko

numer indeksu

grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia

TEST Kolokwium 2 GAL II, 22 maja 2025

1. (5 pkt) Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ będzie ortonormalnym układem wektorów w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Udowodnij, że $\alpha = \langle \alpha, \alpha_1 \rangle \alpha_1 + \dots + \langle \alpha, \alpha_m \rangle \alpha_m$ dla dowolnego $\alpha \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Wektor $v \in V$ spełnia $\|v\|^2 > \langle \alpha_1, v \rangle^2 + \langle \alpha_2, v \rangle^2 + \dots + \langle \alpha_m, v \rangle^2$. Czy możliwe aby $v \in \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$?
2. (5 pkt) Przestrzeń liniowa V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni: $V = W \oplus U$. Czy istnieją takie punkty $p, q \in V$, że podprzestrzenie afiniczne $p + W$ i $q + U$ są rozłączne? Czy istnieją takie punkty $p, q \in V$, że przecięcie $p + W$ i $q + U$ zawiera więcej niż jeden punkt?
3. (5 pkt) Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą iloczynu skalarnego pewnej przestrzeni euklidesowej $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Czy istnieje odwracalna macierz $C \in M_n(\mathbb{R})$ taka, że $A = C^T C$?

4. (5 pkt) Wektory α, β, γ należą do przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wiadomo, że wyznacznik macierzy Grama spełnia $W(\alpha, \beta, \gamma) = 4$. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory α, β, γ . Oblicz $W(\alpha + \beta, \alpha - \beta, \gamma)$.
5. (5 pkt) Niech V będzie przestrzenią euklidesową, $f : V \rightarrow V$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń W , $g : V \rightarrow V$ rzutem prostopadłym na podprzestrzeń U oraz $U \subset W$. Czy $g \circ f = g$?
6. (5 pkt) Dana jest macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$. Udowodnij, że dla każdej pary wektorów $v, w \in (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{st})$ zachodzi $\langle w, Av \rangle = \langle A^T w, v \rangle$.

Kolokwium 2 GAL II, 22 maja 2025

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego oraz numer zadania.

1. Niech forma dwuliniowa $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie określona macierzą

$$G(h_t, st) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (5 pkt) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma jest iloczynem skalarnym?
- (5 pkt) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma obcięta do podprzestrzeni $U = \text{lin}((11, 3, 0), (8, 1, 0))$ jest iloczynem skalarnym?
- (5 pkt) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $h_t((1, 0, 0), (0, 0, 1)) = 0$? Dla $t = 2$ uzupełnij układ $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ do bazy prostopadłej przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, h_2)$.
- (5 pkt) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, h_2)$ znajdź odległość między prostymi

$$L = (1, 1, 2) + \text{lin}((1, 0, 0)), \quad K = (1, 2, 2) + \text{lin}((0, 0, 1))$$

2. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są płaszczyzny

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_4 = 4, \quad x_3 + x_4 = 2\}$$

$$M = (1, 0, 2, 0) + \text{lin}((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$$

- (5 pkt) Znajdź bazę prostopadłą przestrzeni $T(H) + T(M)$. Otrzymaną bazę uzupełnij do bazy prostopadłej przestrzeni $\mathbb{R}^4$.
- (5 pkt) Niech $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie rzutem prostopadłym na M . Udowodnij, że $f(3, 0, 1, 1) = (1, 0, 2, 0)$. Niech $K = f(H)$. Udowodnij, że K jest prostą i znajdź parametryzację tej prostej.
- (5 pkt) Znajdź odległość $\rho(H, M)$ pomiędzy płaszczyznami H i M .
- (5 pkt) Udowodnij, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $\rho(k, H) = \rho(M, H)$.

3. (20 pkt) Rzeczywista przestrzeń liniowa V ma dwa iloczyny skalarne $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ spełniające

$$\langle u, v \rangle_1 = 0 \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad \langle u, v \rangle_2 = 0$$

- Udowodnij, że $\|u\|_1 = \|v\|_1$ wtedy i tylko wtedy gdy $\|u\|_2 = \|v\|_2$.
- Udowodnij, że istnieje $c > 0$ takie, że dla wszystkich $u, v \in V$ zachodzi $\langle u, v \rangle_1 = c \cdot \langle u, v \rangle_2$