

TEST Kolokwium 1 GAL II, 3 kwietnia 2025

1. (5 pkt) Udowodnij, że jeśli endomorfizm f skończenie wymiarowej przestrzeni V jest diagonalizowalny, to $\ker f \oplus \operatorname{im} f = V$. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

Rozwiązanie

Skoro f jest diagonalizowalny, to istnieje baza $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ składająca się z wektorów własnych. Jeśli $\lambda = 0$ to wektor własny należy do $\ker f$. Jeśli $\lambda \neq 0$ to $f(\frac{1}{\lambda}\alpha) = \alpha$, więc α należy do $\operatorname{im} f$. Dzielimy bazę wektorów własnych na dwie grupy: osobno te które mają wartość własną zero i osobno te, które mają wartość własną niezerową. Każdy wektor należący do V można jednoznacznie przedstawić w bazie, zatem ma jednoznacznie wyznaczony składnik należący do $\ker f$ oraz do $\operatorname{im} f$. Zatem dostajemy $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

Odwrotna implikacja nie jest prawdziwa. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie zadane macierzą $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Endomorfizm nie jest diagonalizowalny, a $\ker f = \operatorname{lin}(\epsilon_1)$, $\operatorname{im} f = \operatorname{lin}(\epsilon_2, \epsilon_3)$. Czyli $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

2. (5 pkt) Niech f będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni V . Udowodnij, że jeśli $w_f(\lambda) = (\lambda - a)^k g(\lambda)$ gdzie $g(a) \neq 0$, to $\dim V_{(a)} \leq k$.

Rozwiązanie

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ będzie bazą $V_{(a)}$, uzupełniamy ten układ do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V . Wówczas macierz f w tej bazie jest w postaci blokowej

$$M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} a \cdot I_r & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Zatem $w_f(\lambda) = (a - \lambda)^r \cdot h(\lambda)$, więc $r \leq k$.

3. (5 pkt) Dana jest macierz $A \in M_3(\mathbb{C})$, o której wiadomo, że $\operatorname{tr} A = 2$ oraz $\lambda = 3$ jest wartością własną dla wektorów $(1, 2, 1)$ i $(1, 1, 0)$. Jakie są możliwe wartości $\det A$?

Rozwiązanie

Wektory $(1, 2, 1)$ i $(1, 1, 0)$ są liniowo niezależne zatem 3 jest podwójną wartością własną. Niech a będzie trzecią wartością własną. Wtedy

$$\operatorname{tr} A = 3 + 3 + a, \quad \det A = 3 \cdot 3 \cdot a$$

czyli $\det A = -36$.

Imię i nazwisko	numer indeksu	grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia
-----------------	---------------	--

4. (5 pkt) Niech f będzie endomorfizmem skończonej wymiarowej przestrzeni V . Niech $k = \dim \operatorname{im} f$. Czy f może mieć $k + 1$ różnych wartości własnych? Czy f może mieć $k + 2$ różnych wartości własnych?

Rozwiązanie

Jeśli f ma m różnych niezerowych wartości własnych, to dla każdego $\lambda \neq 0$ istnieje wektor własny α i należy do obrazu przekształcenia, bo $f(\frac{1}{\lambda}\alpha) = \alpha$. Wektory własne dla różnych wartości własnych są liniowo niezależne więc $\dim \operatorname{im} f \geq m$. Zatem f może mieć $k + 1$ różnych wartości własnych, jeśli jedna z nich to zero, natomiast nie może mieć $k + 2$ różnych wartości własnych.

5. (5 pkt) Macierz $A \in M_3(\mathbb{R})$ spełnia $(A - 2I_3)(A - I_3) = 0$ zaś jej wielomianem charakterystycznym jest $(2 - \lambda)^2(a - \lambda)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Jakie są możliwe wartości a ? Czy macierz A musi być diagonalizowalna?

Rozwiązanie

Zauważmy, że a jest wartością własną, zatem istnieje $\alpha \neq 0$ taki, że $A \cdot \alpha = a\alpha$. Zatem $0 = (A - 2I_3)(A - I_3) \cdot \alpha = (A - 2I_3)(a\alpha - \alpha) = (a - 1)(A - 2I_3)(\alpha) = (a - 1)(a - 2)\alpha$. Czyli $a = 1$ lub $a = 2$.

Niech J będzie macierzą A w postaci Jordana

$$(J - 2I_3)(J - I_3) = (CAC^{-1} - 2I_3)(CAC^{-1} - I_3) = C(A - 2I_3)C^{-1}C(A - I_3)C^{-1} = 0$$

Jeśli $a = 1$ to $J = \begin{bmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $(J - 2I_3)(J - I_3) = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$. Zatem $x = 0$ i macierz A jest diagonalizowalna.

Jeśli $a = 2$ to $J = \begin{bmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $(J - 2I_3)(J - I_3) = \begin{bmatrix} 0 & x & xy \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$. Zatem $x = y = 0$ i macierz A jest diagonalizowalna.

6. (5 pkt) Dana jest macierz $A \in M_{2n}(\mathbb{K})$ w postaci blokowej

$$A = \begin{bmatrix} a \cdot I_n & I_n \\ 0 & a \cdot I_n \end{bmatrix}$$

Udowodnij, że postać Jordana macierzy A ma n klatek rozmiaru 2.

Rozwiązanie

Macierz A jest macierzą pewnego $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ w bazach standardowych. Zauważmy, że

$$f(\epsilon_1) = a \cdot \epsilon_1, \quad f(\epsilon_2) = a \cdot \epsilon_2, \quad \dots, \quad f(\epsilon_n) = a \cdot \epsilon_n$$

$$f(\epsilon_{n+1}) = a \cdot \epsilon_{n+1} + \epsilon_1, \quad f(\epsilon_{n+2}) = a \cdot \epsilon_{n+2} + \epsilon_2, \quad \dots, \quad f(\epsilon_{2n}) = a \cdot \epsilon_{2n} + \epsilon_n$$

Zatem macierz przekształcenia w bazie

$$\mathcal{A} = (\epsilon_1, \epsilon_{n+1}, \epsilon_2, \epsilon_{n+2}, \dots, \epsilon_n, \epsilon_{2n})$$

jest w postaci Jordana i ma n klatek rozmiaru 2.

Kolokwium 1 GAL II, 3 kwietnia 2025

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego oraz numer zadania.

1. Dla $n > 2$ dana jest macierz $A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

- (7 pkt) Udowodnij, że dla n parzystych wyznacznik macierzy A_n jest równy zero.
- (7 pkt) Udowodnij, że dla n nieparzystych macierz A_n jest odwracalna.
- (6 pkt) Dla $n = 111$ oblicz wyraz w n -tym wierszu i n -tej kolumnie macierzy A_n^{-1} .

2. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą o współczynnikach rzeczywistych.

- (4 pkt) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ liczba 2 jest wartością własną macierzy A ? Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ liczba 1 jest wartością własną macierzy A ?
 - (10 pkt) Dla $a = 0$ znajdź postać Jordana macierzy A i bazę Jordana endomorfizmu $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takiego, że $M(f)_{st}^t = A$.
 - (6 pkt) Czy istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że macierz A jest diagonalizowalna?
3. • (10 pkt) Niech $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ będą niezerowymi wektorami. Udowodnij, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]$$

ma wartość własną $\lambda = [y_1 \quad \dots \quad y_n] \cdot [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$. Udowodnij, że jeśli $\lambda \neq 0$ to macierz A jest diagonalizowalna.

- (10 pkt) Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą rzędu 1. Udowodnij, że

$$\det(A + I_n) = \operatorname{tr}(A) + 1$$

Rozwiązanie zadania 1

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dla n parzystych wektor $(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$ należy do $\ker A$ zatem $\det A = 0$.
- Niech n nieparzyste, pokażemy, że $\ker A = \{0\}$. Przypuśćmy, że $A \cdot (x_1, \dots, x_n)^T = (0, \dots, 0)^T$. Wówczas spełnione są równania:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0, \quad x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0, \dots, x_{n-1} + x_n = 0$$

Obliczamy:

$$x_{n-1} = -x_n, \quad x_{n-2} = x_n, \quad x_{n-3} = -x_n, \quad \dots \quad x_1 = x_n$$

i wstawiamy do pierwszego równania:

$$x_n - x_n + x_n - \dots - x_n + x_n = 0$$

Zatem $x_n = 0$ i $\ker A = \{0\}$. Tak więc $\det A \neq 0$ i macierz jest odwracalna.

- Dla $n = 111$ macierz A jest odwracalna. Wyraz w ostatnim wierszu i ostatniej kolumnie obliczamy:

$$\frac{1}{\det A} (-1)^{n+n} \det B$$

gdzie macierz B powstaje z A przez skreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny (transponowanie na przekątnej nie ma znaczenia). Zauważmy, że $B = A_{110}$, czyli $\det B = 0$ i szukany wyraz macierzy odwrotnej też jest równy zero.

Inne rozwiązanie

Wyznacznik macierzy A_n można policzyć indukcyjnie. Rozwijając względem pierwszej kolumny dostajemy

$$\det A_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 - \det A_{n-1}$$

Rozwiązanie zadania 2

Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą o współczynnikach rzeczywistych.

- Wartości własne macierzy to

$$\lambda = 1, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = a - 1, \quad \lambda = -a - 1$$

- Dla $a = 0$ wielomian charakterystyczny wynosi $w_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda)^2$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Szukamy klatek Jordana i wektorów dla $\lambda = 1$:

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest rzędu 3 zatem

$$J = \begin{bmatrix} -1 & ? & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prawa część macierzy A wygląda jak macierz w postaci Jordana i rzeczywiście, biorąc wektory ϵ_3, ϵ_4 dostajemy

$$A - I : \quad \epsilon_4 \longrightarrow \epsilon_3 \longrightarrow 0$$

czyli

$$A \cdot \epsilon_3 = \epsilon_3, \quad A \cdot \epsilon_4 = \epsilon_3 + \epsilon_4$$

Teraz $\lambda = -1$

$$A + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz ta jest rzędu 3 zatem

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trzeba policzyć

$$(A + I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 16 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

i widzimy, że bazę Jordana uzupełnią wektory ϵ_2 i $(A + I)\epsilon_2$. Zatem układ

$$(1, 0, 4, -4), \quad \epsilon_2, \quad \epsilon_3, \quad \epsilon_4$$

jest szukaną bazą.

- $\lambda = 1$ jest podwójnym pierwiastkiem niezależnie od $a \in \mathbb{R}$. Należy zatem obliczyć $\dim V_{(1)}$ w zależności od $a \in \mathbb{R}$.

$$\dim V_{(1)} = 4 - r(A - I)$$

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rząd tej macierzy wynosi 3 jeśli $a^2 \neq 4$ oraz 2 jeśli $a^2 = 4$. Jednak dla $a^2 = 4$ wartość własna $\lambda = 1$ jest potrójnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego. Zatem nie istnieje takie $a \in \mathbb{R}$ by A była diagonalizowalna.

Rozwiązanie zadania 3

- Niech $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ będą niezerowymi wektorami. Udowodnij, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]$$

ma wartość własną $\lambda = [y_1 \quad \dots \quad y_n] \cdot [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$. Udowodnij, że jeśli $\lambda \neq 0$ to macierz A jest diagonalizowalna.

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n] \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot ([y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \lambda \end{aligned}$$

Zatem λ jest wartością własną macierzy A . Macierz A jest rzędu 1 zatem $\dim \ker A = n - 1$. Jeśli $\lambda \neq 0$ to

$$\dim V_{(\lambda)} + \dim V_{(0)} = n$$

i macierz jest diagonalizowalna.

- Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą rzędu 1. Udowodnij, że

$$\det(A + I_n) = \text{tr}(A) + 1$$

Jeśli $r(A) = 1$ to $\dim \ker A = n - 1$, czyli $\dim V_{(0)} = n - 1$. Zatem λ^{n-1} dzieli wielomian charakterystyczny macierzy A . Wielomian ten ma stopień n , zatem

$$w_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-1} (\lambda - a)$$

dla pewnego $a \in \mathbb{K}$. Zauważmy, że $a = \text{tr } A$ oraz macierz A spełnia założenia twierdzenia Jordana. Zatem postać Jordana macierzy A to

$$J = \begin{bmatrix} \text{tr } A & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

przy czym gwiazdka jest równa zero jeśli $\text{tr } A \neq 0$ oraz jeden jeśli $\text{tr } A = 0$. Macierze $A + I$ oraz $J + I$ są podobne zatem mają równe wyznaczniki, co kończy zadanie.