
Imię i nazwisko

numer indeksu

grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia

TEST Kolokwium 1 GAL II, 3 kwietnia 2025

1. (5 pkt) Udowodnij, że jeśli endomorfizm f skończenie wymiarowej przestrzeni V jest diagonalizowalny, to $\ker f \oplus \operatorname{im} f = V$. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?
2. (5 pkt) Niech f będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni V . Udowodnij, że jeśli $w_f(\lambda) = (\lambda - a)^k g(\lambda)$ gdzie $g(a) \neq 0$, to $\dim V_{(a)} \leq k$.
3. (5 pkt) Dana jest macierz $A \in M_3(\mathbb{C})$, o której wiadomo, że $\operatorname{tr} A = 2$ oraz $\lambda = 3$ jest wartością własną dla wektorów $(1, 2, 1)$ i $(1, 1, 0)$. Jakie są możliwe wartości $\det A$?

Imię i nazwisko

numer indeksu

grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia

4. (5 pkt) Niech f będzie endomorfizmem skończonej wymiarowej przestrzeni V . Niech $k = \dim \operatorname{im} f$. Czy f może mieć $k + 1$ różnych wartości własnych? Czy f może mieć $k + 2$ różnych wartości własnych?

5. (5 pkt) Macierz $A \in M_3(\mathbb{R})$ spełnia $(A - 2I_3)(A - I_3) = 0$ zaś jej wielomianem charakterystycznym jest $(2 - \lambda)^2(a - \lambda)$ dla pewnego $a \in \mathbb{R}$. Jakie są możliwe wartości a ? Czy macierz A musi być diagonalizowalna?

6. (5 pkt) Dana jest macierz $A \in M_{2n}(\mathbb{K})$ w postaci blokowej

$$A = \begin{bmatrix} a \cdot I_n & I_n \\ 0 & a \cdot I_n \end{bmatrix}$$

Udowodnij, że postać Jordana macierzy A ma n klatek rozmiaru 2.

Kolokwium 1 GAL II, 3 kwietnia 2025

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego oraz numer zadania.

1. Dla $n > 2$ dana jest macierz $A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

- (7 pkt) Udowodnij, że dla n parzystych wyznacznik macierzy A_n jest równy zero.
- (7 pkt) Udowodnij, że dla n nieparzystych macierz A_n jest odwracalna.
- (6 pkt) Dla $n = 111$ oblicz wyraz w n -tym wierszu i n -tej kolumnie macierzy A_n^{-1} .

2. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą o współczynnikach rzeczywistych.

- (4 pkt) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ liczba 2 jest wartością własną macierzy A ? Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ liczba 1 jest wartością własną macierzy A ?
 - (10 pkt) Dla $a = 0$ znajdź postać Jordana macierzy A i bazę Jordana endomorfizmu $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ takiego, że $M(f)_{st}^t = A$.
 - (6 pkt) Czy istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że macierz A jest diagonalizowalna?
3. • (10 pkt) Niech $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ będą niezerowymi wektorami. Udowodnij, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]$$

ma wartość własną $\lambda = [y_1 \quad \dots \quad y_n] \cdot [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$. Udowodnij, że jeśli $\lambda \neq 0$ to macierz A jest diagonalizowalna.

- (10 pkt) Niech $A \in M_n(\mathbb{K})$ będzie macierzą rzędu 1. Udowodnij, że

$$\det(A + I_n) = \operatorname{tr}(A) + 1$$