Zadanie 4. [20 pt] W przestrzeni euklidesowej afinicznej H wymiaru 3 dany jest afinicznie niezależny układ punktów p, q, r.

(5 p.) Niech s będzie rzutem prostopadłym punktu r na pewną płaszczyznę zawierającą prostą $\mathrm{af}(p, q)$. Niech t oraz t' będą odpowiednio obrazami punktów r oraz s przy rzucie prostopadłym na $\mathrm{af}(p, q)$. Wykaż, że $t = t'$.

(10 p.) Niech π' będzie płaszczyzną tworzącą z płaszczyzną $\pi = \mathrm{af}(p, q, r)$ kąt θ (przyjmujemy, że jest to kąt między niezerowymi wektorami prostopadłymi odpowiednio do π oraz do π'). Niech p', q', r' będą obrazami punktów p, q, r przy rzucie prostopadłym na π'. Wykaż, że

$$\mu_2((S(p, q, r)) \cdot \cos\theta = \mu_2((S(p', q', r')).$$

(5 p.) Niech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $T(H)$. Niech S_1, S_2, S_3 będą obrazami trójkąta $S(p, q, r)$ przy rzutach prostopadłych przestrzeni H odpowiednio na płaszczyzny $\alpha_1^\perp, \alpha_2^\perp, \alpha_3^\perp$. Wykaż, że

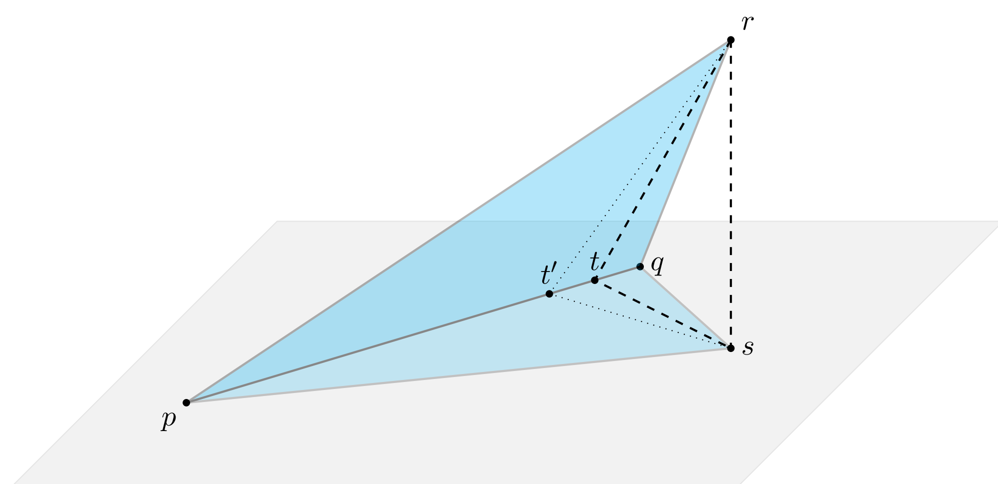
$$\mu_2(S(p, q, r)) = \sqrt{\mu_2(S_1)^2 + \mu_2(S_2)^2 + \mu_2(S_3)^2}.$$

Rozwiązanie. Zacznijmy od punktu (a). Wykażemy, że $\overrightarrow{t't} = 0$, a dokładniej: $\overrightarrow{t't} \in \overrightarrow{pq} \cap \overrightarrow{pq}^\perp$.

Mamy:

$$\overrightarrow{t't} = \overrightarrow{t'r} + \overrightarrow{rt} = \overrightarrow{t's} + \overrightarrow{sr} + \overrightarrow{rt}$$

Wektory $\overrightarrow{t's}$, $\overrightarrow{sr}$, $\overrightarrow{rt}$ należą do $\overrightarrow{pq}^\perp$, co kończy dowód.



Przechodzimy do punktu (b). Zaczniemy od przypadku, gdy $p' = p, q' = q$ oraz $r' = s$. Wtedy:

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{tr}, \overrightarrow{ts} \rangle}{\|\overrightarrow{tr}\| \cdot \|\overrightarrow{ts}\|}.$$

Stąd

$$\|\overrightarrow{tr}\| \cdot \|\overrightarrow{ts}\| \cdot \cos\theta = \langle \overrightarrow{tr}, \overrightarrow{ts} \rangle$$

Mamy też $\overrightarrow{ts} + \overrightarrow{sr} = \overrightarrow{tr}$, a z drugiej $\overrightarrow{ts} \perp \overrightarrow{sr}$. Zatem w równości wyżej mamy

$$\|\overrightarrow{tr}\| \cdot \|\overrightarrow{ts}\| \cdot \cos\theta = \langle \overrightarrow{ts} + \overrightarrow{sr}, \overrightarrow{ts} \rangle = \langle \overrightarrow{ts}, \overrightarrow{ts} \rangle = \|\overrightarrow{ts}\|^2.$$

Stąd $\|\overrightarrow{ts}\| = \|\overrightarrow{tr}\| \cdot \cos\theta$.

Skoro $\overrightarrow{tr}$ jest rzutem $\overrightarrow{pr}$ na $\overrightarrow{pq}^{\perp} \cap \pi$ oraz $\overrightarrow{ts}$ jest rzutem $\overrightarrow{ps}$ na $\overrightarrow{pq}^{\perp} \cap \pi'$, to

$$W(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr}) = \|\overrightarrow{pq}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{tr}\|^2 \quad \text{oraz} \quad W(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pr}) = \|\overrightarrow{pq}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{ts}\|^2.$$

W rezultacie

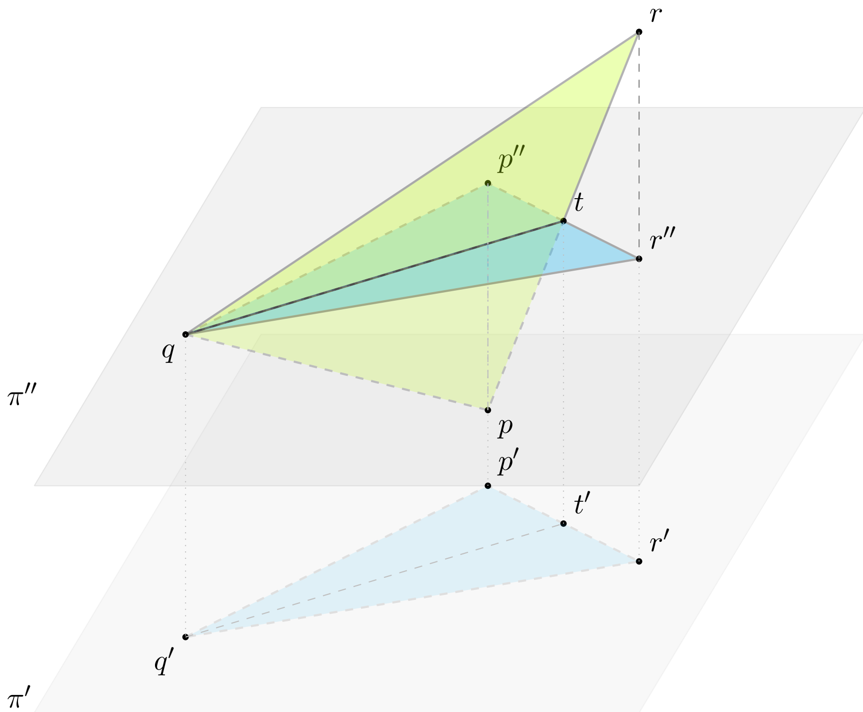
$$\mu_2(S(p,q,s)) = \frac{1}{2}\sqrt{W(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{ps})} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{pq}\| \cdot \|\overrightarrow{ts}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{pq}\| \cdot \|\overrightarrow{tr}\| \cdot \cos\theta = \mu_2(S(p,q,r)) \cdot \cos\theta.$$

Przechodzimy do ogólnego argumentu. Rozważmy płaszczyznę π'', która jest równoległa do π', przechodzi przez jeden z wierzchołków trójkąta $S(p,q,r)$, powiedzmy q, i przecina ten trójkąt na odcinku o początku w punkcie q, oraz o końcu w pewnym punkcie t. Niech t' będzie rzutem punktu t na π'. Niech p'' oraz r'' będą rzutami p oraz r na płaszczyznę π''. Jest jasne, że

$$\mu_2(S(p',q',t')) = \mu_2(S(p'',q,t)), \quad \mu_2(S(r',t',q')) = \mu_2(S(r'',t,q)).$$

Widzimy stąd, że jeśli θ jest kątem między π, a π'', to

$$S(p',r',q') = \mu_2(S(p'',q,t)) + \mu_2(S(r'',t,q)) = (\mu_2(S(p,q,t)) + \mu_2(S(r,t,q)))\cos\theta = \mu_2(S(p,q,r))\cos\theta.$$



Wynika to bezpośrednio ze wzoru na „pole podstawy razy wysokość”, gdyż mamy $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pt} + \overrightarrow{tr}$ oraz $\overrightarrow{p'r'} = \overrightarrow{p't'} + \overrightarrow{t'r'} = \overrightarrow{p''t} + \overrightarrow{tr''} = \overrightarrow{p''r''}$. Dla wektora $\gamma \perp \overrightarrow{pr}$ mamy (z równości w nierówności trójkąta) $\|\gamma\| \cdot \|\overrightarrow{pr}\| = \|\gamma\| \cdot \|\overrightarrow{pt} + \overrightarrow{tr}\| = \|\gamma\| \cdot (\|\overrightarrow{pt}\| + \|\overrightarrow{tr}\|) = \|\gamma\| \cdot \|\overrightarrow{pt}\| + \|\gamma\| \cdot \|\overrightarrow{tr}\|$. Podobnie dla $\overrightarrow{p'r'}$ oraz $\overrightarrow{p''r''}$.

Przechodzimy do punktu (c). Niech $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ będą kątami tworzonymi przez płaszczyznę π odpowiednio z płaszczyznami $\alpha_1^{\perp}, \alpha_2^{\perp}, \alpha_3^{\perp}$. Niech $P = \mu_2(S(p,q,r))$. Na podstawie powyższych rozważań mamy:

$$P_1 = P \cdot \cos\theta_1, \quad P_2 = P \cdot \cos\theta_2, \quad P_3 = P \cdot \cos\theta_3.$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1.$$

Niech $T(\pi)^{\perp} = \mathrm{lin}(\gamma)$, gdzie $\|\gamma\| = 1$. Jest jasne, że dla $i = 1,2,3$ mamy

$$\cos\theta_i = \langle \gamma, \alpha_i \rangle.$$

To jednak znaczy, że $\gamma = \cos\theta_1 \cdot \alpha_1 + \cos\theta_2 \cdot \alpha_2 + \cos\theta_3 \cdot \alpha_3$. Stąd

$$1 = \|\gamma\|^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3.$$