Geometria z algebrą liniową II, 2023/2024
kolokwium 2., zadanie 2. rozwiązanie wzorcowe wraz z uwagami

Dana jest przestrzeń euklidesowa afiniczna $H = (\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ ze standardowym iloczynem skalarnym, taka że $T(H)$ jest zorientowana zgodnie z bazą standardową. Dany jest punkt $p = (3, 2, 2)$ oraz prosta $L = (0, 0, 3) + \mathrm{lin}((1, 1, -1))$.

a) Znajdź rzut prostopadły punktu p na prostą L.

Oznaczmy szukany punkt jako r, oraz niech $q = (0, 0, 3)$ i $v = (1, 1, -1)$. Zaczynamy od znalezienia rzutu prostopadłego wektora $\overrightarrow{qp} = (3, 2, 2) - (0, 0, 3) = (3, 2, -1)$ na prostą $T(L) = \mathrm{lin}(v)$:

$$\overrightarrow{qr} = \frac{\langle \overrightarrow{qp}, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = \frac{6}{3}(1, 1, -1) = (2, 2, -2).$$

Zatem szukany punkt to

$$r = \overrightarrow{qr} + r = (2, 2, -2) + (0, 0, 3) = (2, 2, 1).$$

Inny sposób rozwiązania zadania może polegać na wyznaczeniu płaszczyzny M prostopadłej do L i przechodzącej przez punkt p jako $p + \mathrm{lin}(v_1, v_2)$ a następnie zapisanie szukanego punktu r parametrycznie jako element prostej L, czyli $r = q + av$ i jako element płaszczyzny M, czyli $r = p + bv_1 + cv_2$. Przyrównanie do siebie tych parametryzacji daje układ równań, którego rozwiązanie prowadzi do znalezienia punktu r. Metoda ta wymaga jednak nieco więcej obliczeń niż przedstawiona powyżej.[1]

b) Ile jest izometrii $f\colon H \to H$, takich że $f(p) = p$ oraz $f(q) \in L$, dla każdego punktu $q \in L$?

Zauważmy najpierw, że dla każdej izometrii f spełniającej warunki zadania zachodzi $f(r) = r$, gdzie r jest punktem znalezionym w poprzednim podpunkcie. Rzeczywiście, skoro $r \in L$, to $f(r) \in L$, a skoro $f(p) = p$, $\rho(p, r) = \rho(p, f(r))$ (izometria zachowuje odległość pomiędzy punktami). Jedynym punktem na prostej L o takiej odległości jest właśnie punkt r, skoro jest rzutem prostopadłym punktu p na prostą L.

Zauważmy też, że skoro $f(r) = r$, to dla każdego punktu $x \in \mathbb{R}^3$ mamy $f(x) = f(r) + f'(\overrightarrow{rx}) = r + f'(\overrightarrow{rx})$, a więc wystarczy, że znajdziemy wszystkie izometrie liniowe $f'\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, aby izometria f, spełniała warunki zadania.

Aby znaleźć ograniczenia wynikające z zadania warto zatem rozważyć odpowiedni ortogonalny układ bazowy zaczepiony w punkcie r. Rozważmy więc następujące wektory:

- $v_1 = \overrightarrow{rp} = (1, 0, 1)$. Skoro $f(p) = p$ oraz $f(r) = r$, to $f'(v_1) = f(p) - f(r) = p - r = v_1$.
- $v_2 = \overrightarrow{rq} = (-2, -2, 2)$. Skoro $f(q) \in L$, $f(r) = r$, oraz $\rho(r, f(q)) = \rho(r, q)$, mamy, że $f(q) \in \{r + v_2, r - v_2\}$. Zatem $f'(v_2) = \pm v_2$. Oczywiście $v_1 \perp v_2$.
- Niech $v_3 \in (\mathrm{lin}(v_1, v_2))^\perp$, a zatem v_3 jest dowolnym rozwiązaniem układu równań

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right].$$

  Na przykład, niech $v_3 = (-1, 2, 1)$. Skoro izometria zachowuje kąty, mamy, że $f'(v_3) \perp f'(v_1) = v_1$ oraz $f'(v_3) \perp f'(v_2) = \pm v_2$. A zatem $v_3 \in (\mathrm{lin}(v_1, v_2))^\perp$. Skoro izometria liniowa zachowuje długość wektorów, dostajemy, że $f'(v_3) = \pm v_3$. Oznaczmy $s = r + v_3$. Mamy zatem, że $f(s) \in \{r + v_3, r - v_3\}$. [2]

---

[1] Studenci rozwiązywali to zadanie jeszcze na dwa inne sposoby, generujące dużo więcej pracy rachunkowej, których stosowanie w tej sytuacji jest nieuzasadnione, a wręcz absurdalne: znalezienie ogólnego wzoru na przekształcenie afiniczna $g\colon H \to H$ będące rzutem prostopadłym na prostą L (z reguły poprzez rozważenie macierzy przekształcenia g' w bazie własnej) i podstawienie do tego wzoru punktu p oraz znalezienie rzutu wektora $\overrightarrow{qp}$ na płaszczyznę $T(L)^\perp$ poprzez znalezienie jej ortogonalnej bazy, oraz odjęcie tego rzutu od wektora $\overrightarrow{qp}$, żeby otrzymać rzut na $T(L)$.

[2] Uwaga: rozważenie zachowania f' na istotnie innej bazie, np. nieortogonalnej, albo inaczej ustawionej (chociażby bazie standardowej) prowadzi do nieprzyjemnych rachunków związanych z rozwiązywaniem układu równań drugiego stopnia. Niektórzy rozwiązujący się z takimi rachunkami zmierzali.

A zatem f' przeprowadza bazę ortogonalną $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ na bazę ortogonalną $\{v_1, \pm v_2, \pm v_3\}$, co daje cztery możliwe izometrie, które można opisać następująco [3]

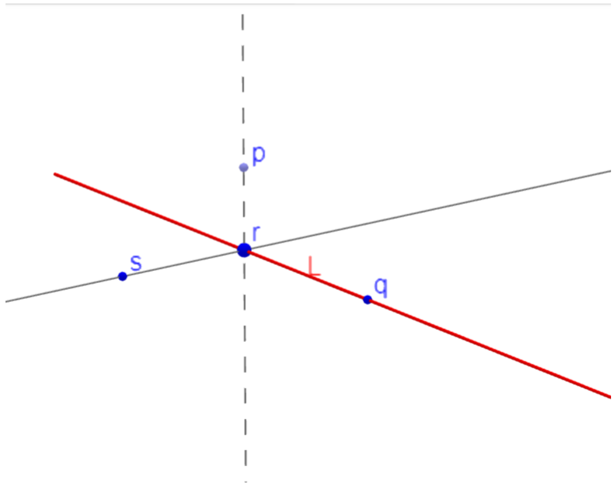
(1) $\{v_1, v_2, v_3\} \mapsto \{v_1, v_2, v_3\}$, f jest identycznością

(2) $\{v_1, v_2, v_3\} \mapsto \{v_1, v_2, -v_3\}$, f jest symetrią prostopadłą względem płaszczyzny $\mathrm{af}(r, p, q)$,

(3) $\{v_1, v_2, v_3\} \mapsto \{v_1, -v_2, v_3\}$, f jest symetrią prostopadłą względem płaszczyzny $\mathrm{af}(r, p, s)$,

(4) $\{v_1, v_2, v_3\} \mapsto \{v_1, -v_2, -v_3\}$, f jest symetrią prostopadłą względem prostej $\mathrm{af}(r, p)$.

W szczególności każde z tych czterech przekształceń jest izometrią, co można również uzasadnić zauważając, że każde przeprowadza bazę ortonormalną $\{v_1/\|v_1\|, v_2/\|v_2\|, v_3/\|v_3\|\}$ na odpowiednią bazę ortonormalną $\{v_1/\|v_1\|, \pm v_2/\|v_2\|, \pm v_3/\|v_3\|\}$.[4]



c) Niech $f\colon H \to H$ będzie izometrią, taką że przekształcenie f' zmienia orientację przestrzeni $T(H)$ oraz $f(p) = p$ i $f(q) = q$, dla każdego $q \in L$. Podaj wzór przekształcenia f lub podaj wartości przekształcenia f na wybranej bazie punktowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$.

Zauważmy, że skoro $f(q) = q$, to $f'(v_2) = v_2$ (posługując się oznaczeniami wprowadzonymi w poprzednim podpunkcie). Ten warunek spełniają izometrie (1) oraz (2) z poprzedniego podpunktu.

Skoro f' ma zmieniać orientację przestrzeni mamy też, że $\det M(f')^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = -1$[5]. Oczywiście w przypadku identyczności macierz f' jest jednostkowa i jej wyznacznik to 1. A zatem pozostaje symetria względem płaszczyzny $\mathrm{af}(r, p, q)$. W tym przypadku

$$M(f')^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ma wyznacznik -1, czyli spełnia warunki zadania. Skoro $\{r; v_1, v_2, v_3\}$ jest układem bazowym, $\{r, p, q, s\}$ jest bazą punktową mu odpowiadającą[6]. Wartości f na tych punktach wyglądają zaś następująco:

$$f(r) = r, f(p) = p, f(q) = q, f(s) = f(r + v_3) = r + f'(v_3) = r - v_3 = (3, 0, 0).$$

Alternatywnie treść zadania dopuszczała możliwość znalezienia wzoru na izometrię f. W tym celu znajdujemy wartości f' na wektorach z bazy standardowej. Mamy:

$$(1, 0, 0) = \frac{3v_1 - v_2 - v_3}{6},$$

$$(0, 1, 0) = \frac{-v_2 + 2v_3}{6},$$

[3]Niektórzy studenci wypisywali od razu wszystkie te izometrie (lub niektóre z nich) nie uzasadniając w żaden sposób, że to wszystkie możliwe przypadki.

[4]Niektórzy studenci nie przedstawili żadnego argumentu, że każda ze znalezionych opcji prowadzi do izometrii.

[5]Nie zależy to w żaden sposób od tego, jak zorientowana jest sama baza $\mathcal{A}$.

[6]Niektórzy rozwiązujący nie uzasadnili tego, że rozważany przez nich zbiór punktów jest bazą punktową.

$$(0,0,1) = \frac{3v_1 + v_2 + v_3}{6},$$

a zatem

$$f'(1,0,0) = \frac{3v_1 - v_2 + v_3}{6} = \frac{1}{3}(2,2,1),$$

$$f'(0,1,0) = \frac{-v_2 - 2v_3}{6} = \frac{1}{3}(2,-1,-2),$$

$$f'(0,0,1) = \frac{3v_1 + v_2 - v_3}{6} = \frac{1}{3}(1,-2,2).$$

w takim razie:

$$f'(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x + 2y + z, 2x - y - 2z, x - 2y + 2z),$$

a skoro $f(r) = r$, $f(0,0,0) = f(r) - f'(r) = (2,2,1) - \frac{1}{3}(9,0,0) = (-1,2,1)$, to

$$f(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 3, 2x - y - 2z + 6, x - 2y + 2z + 3).$$