Kolokwium drugie z GAL II i GAL II*, 23 maja 2024

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania.

Zadanie 1. [20 p.] Dana jest przestrzeń euklidesowa liniowa $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym oraz podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}((1,-1,-1,0),(0,1,1,-1)) \subset \mathbb{R}^4$.

(10 p.) Znajdź bazę ortogonalną przestrzeni $W^\perp$.

(10 p.) Niech $s : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie symetrią prostopadłą względem podprzestrzeni W. Znajdź dowolną bazę podprzestrzeni $s(U)$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^4$ jest podprzestrzenią opisaną układem równań

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Zadanie 2. [20 p.] Dana jest przestrzeń euklidesowa afiniczna $H = (\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_{st})$, taka że $T(H)$ zorientowana jest zgodnie z bazą standardową. Dany jest punkt $p = (3,2,2)$ oraz prosta $L = (0,0,3) + \mathrm{lin}((1,1,-1))$.

(5 p.) Znajdź rzut prostopadły punktu p na prostą L.

(10 p.) Ile jest izometrii $f : H \longrightarrow H$, takich że $f(p) = p$ oraz $f(q) \in L$, dla każdego punktu $q \in L$? Odpowiedź uzasadnij.

(5 p.) Niech $f : H \longrightarrow H$ będzie izometrią, taką że przekształcenie f' zmienia orientację przestrzeni $T(H)$ oraz $f(p) = p$ i $f(q) = q$, dla każdego $q \in L$. Podaj wzór przekształcenia f lub podaj wartości przekształcenia f na wybranej bazie punktowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 3. [10 p.] Niech $\langle\,,\rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej V. Wykaż, że dla dowolnych wektorów $\alpha, \beta \in V$ zachodzą nierówności $|\langle\alpha,\beta\rangle| \leqslant \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ oraz $\|\alpha\| + \|\beta\| \geqslant \|\alpha + \beta\|$.

Zadanie 4. [20 p.] W przestrzeni euklidesowej afinicznej H wymiaru 3 dany jest afinicznie niezależny układ punktów p, q, r.

(5 p.) Niech s będzie rzutem prostopadłym punktu r na pewną płaszczyznę zawierającą prostą $\mathrm{af}(p,q)$. Niech t oraz t' będą odpowiednio obrazami punktów r oraz s przy rzucie prostopadłym na $\mathrm{af}(p,q)$. Wykaż, że $t = t'$.

(10 p.) Niech π' będzie płaszczyzną tworzącą z płaszczyzną $\pi = \mathrm{af}(p,q,r)$ kąt θ (przyjmujemy, że jest to kąt między niezerowymi wektorami, które są prostopadłe odpowiednio do $T(\pi)$ oraz do $T(\pi')$). Niech p', q', r' będą obrazami punktów p, q, r przy rzucie prostopadłym na π'. Wykaż, że

$$\mu_2((S(p,q,r)) \cdot \cos\theta = \mu_2((S(p',q',r')).$$

(5 p.) Niech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni $T(H)$. Niech S_1, S_2, S_3 będą obrazami trójkąta $S(p,q,r)$ przy rzutach prostopadłych przestrzeni H odpowiednio na płaszczyzny $\alpha_1^\perp, \alpha_2^\perp, \alpha_3^\perp$. Wykaż, że

$$\mu_2(S(p,q,r)) = \sqrt{\mu_2(S_1)^2 + \mu_2(S_2)^2 + \mu_2(S_3)^2}.$$

Uwaga. Przez $\mu_2(S(x,y,z))$ rozumiemy miarę 2-wymiarową (pole) trójkąta o wierzchołkach x, y, z.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

Kolokwium drugie z GAL II i GAL II*, 23 maja 2024

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania (6×5 p.):

1. Macierz symetryczna $A = [a_{ij}] \in M_4(\mathbb{R})$ ma na przekątnej wyłącznie wyrazy dodatnie oraz $\det A > 0$. Czy wynika stąd, że forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dana wzorem $h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 4} a_{ij} x_i y_j$ jest iloczynem skalarnym?

2. Niech U będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\, , \rangle)$. Dla wektora $v \in V$ niech $r(v)$ będzie obrazem v przy rzucie prostopadłym na U. Uzasadnij, że $\langle r(v), v \rangle = \|r(v)\|^2$.

3. Rozstrzygnij, czy dla każdej bazy α_1, α_2 dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\, , \rangle)$ istnieje baza β_1, β_2 przestrzeni V spełniająca dla każdych $i, j \in \{1, 2\}$ warunki

$$\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j, \\ 0, & \text{dla } i \neq j. \end{cases}$$

Zadanie 5 (c.d.)

4. Dana jest podprzestrzeń W przestrzeni euklidesowej liniowej V. Niech $f : V \longrightarrow V$ będzie rzutem prostopadłym na podprzestrzeń $W^{\perp}$ oraz niech $g : V \longrightarrow V$ będzie symetrią prostopadłą względem W. Czy dla każdego wektora $v \in V$ spełniona jest równość $v - 2f(v) = g(v)$?

5. Niech $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ będzie wektorem długości 1 w przestrzeni euklidesowej liniowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Niech $A = [a_1\, a_2 \ldots\, a_n] \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$. Czy iloczyn postaci $A^T A$ jest macierzą rzutu prostopadłego przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na podprzestrzeń $\mathrm{lin}(\alpha)$ w pewnej bazie?

6. Niech $A = M(s)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \in M_3(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetrii prostopadłej $s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ w pewnej bazie ortonormalnej $\mathcal{A}$ przestrzeni euklidesowej liniowej $\mathbb{R}^3$. Czy wynika stąd, że $A = A^T$?