Zadanie 4. [20 pt] Endomorfizmy f, g przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^n$ spełniają warunek $f \circ g = g \circ f \circ f$.

(a) Wykaż, że jeśli $v \notin \ker g$ jest wektorem własnym f o wartości własnej $\lambda \in \mathbb{C}$, to również λ^2 jest wartością własną endomorfizmu f.

(b) Wykaż, że jeśli $\ker f \neq \{0\}$, to endomorfizm g ma wektor własny należący do $\ker f$.

(c) Wykaż, że zachodzi alternatywa: endomorfizm f ma wartość własną $\lambda \in \mathbb{C}$, taką że $|\lambda| = 1$, lub endomorfizmy f oraz g mają wspólny wektor własny.

Rozwiązanie. Niech $f(v) = \lambda v$, dla pewnego niezerowego wektora v. Wówczas:

$$f(g(v)) = (g \circ f \circ f)(v) = \lambda^2(g(v)).$$

Skoro $v \notin \ker g$ to $g(v) \neq 0$, a stąd również λ^2 jest wartością własną f.

Uwaga. Z przytoczonego rozumowania *nie wynika*, że jeśli $g(v)$ jest wektorem własnym endomorfizmu f o wartości własnej λ^2, to f ma też wartość własną λ^4, ponieważ obok warunku

$$f(g(g(v))) = g(f(f(g(v)))) = g(f(\lambda^2(g(v)))) = g(\lambda^4(g(v)) = \lambda^4 g(g(v)),$$

czyli $f(g^2(v)) = \lambda^4(g^2(v))$ potrzebne jest, aby $g^2(v) \neq 0$, a tego nie gwarantuje warunek $v \notin \ker g$.

Uwaga. Nie można z góry zakładać, że f lub g są odwracalne.

Przechodzimy do (b). Niech $0 \neq v \in \ker f$. Wówczas

$$(f \circ g)(v) = (g \circ f \circ f)(v) = (g \circ f)(0) = 0,$$

czyli $f(g(v)) = 0$. W szczególności każdy wektor z $\ker f$ przechodzi przy g na element $\ker f$, czyli ta ostatnia podprzestrzeń jest g-niezmiennicza. Skoro g ograniczony do $\ker f$ jest endomorfizmem przestrzeni zespolonej niezerowego wymiaru, to ma w tej przestrzeni wektor własny na mocy zasadniczego twierdzenia algebry.

Uwaga. Warunek $f \circ g = g \circ f \circ f$ spełnia dowolny endomorfizm g, jeśli przyjmiemy $f = 0$. Bez założenia o algebraicznej domkniętości ciała $\mathbb{C}$ nie można zagwarantować, że g ma wartość własną.

Przechodzimy do (c). Niech ϕ ma wektor własny $v \neq 0$ o wartości własnej λ. Mamy:

$$f(g(v)) = \lambda^2(g(v)), \quad f(g^2(v)) = \lambda^4(g^2(v)), \quad \ldots, \quad f(g^k(v)) = \lambda^{2^k}(g^k(v)).$$

Mamy zatem dwa przypadki.

- Istnieje $k \geqslant 1$ takie, że $g^k(v) = 0$ oraz $g^{k-1}(v) \neq 0$ (gdzie $g^0(v) = v$). Wtedy $g^{k-1}(v)$ jest wektorem własnym zarówno f — o wartości własnej $\lambda^{2^{k-1}}$, jak i g – o wartości własnej 0.
- Dla każdego $k \geqslant 1$ mamy $g^k(v) \neq 0$. Wtedy endomorfizm f ma wartości własne postaci $\lambda^{2^{k-1}}$, dla każdego $k \geqslant 1$, a zatem skoro tych wartości własnych jest skończenie wiele, to albo $\lambda = 0$, albo dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $m > n$ mamy

$$\lambda^{2^m} = \lambda^{2^n}, \quad \text{czyli} \quad \lambda^{2^m - 2^n} = 1.$$

Jeśli $\lambda = 0$, to teza wynika z punktu (b). Jeśli zaś $\lambda \neq 0$, to z równości wyżej mamy $|\lambda| = 1$.