GAL II Kolokwium pierwsze, 11 kwietnia 2024

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania.

Zadanie 1. [20 p.] Dana jest macierz $A_s = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & s & -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

(10 p.) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ postać Jordana macierzy A_s ma dokładnie dwie klatki?

(10 p.) Niech $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ spełnia warunek $M(\phi)_{st}^{st} = A_1$. Wyznacz bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$, w której macierz endomorfizmu ϕ jest w postaci Jordana.

Zadanie 2. [20 p.] W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dany jest punkt $a = (2, 3, 1)$, prosta H opisana równaniami $x_1 - x_2 = 0$, $x_3 = 0$, oraz proste $K_\lambda = (2, 0, 0) + \mathrm{lin}((0, 1, \lambda))$, przy czym $\lambda \in \mathbb{R}$.

(10 p.) Wyznacz układ równań opisujący prostą $L = \mathrm{af}(a, P \cap Q)$, gdzie P jest prostą o parametryzacji $s \mapsto (1 + s, -2s, 1 + 3s)$, dla $s \in \mathbb{R}$ (w standardowym układzie bazowym przestrzeni $\mathbb{R}^3$), oraz $Q = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\}$.

(10 p.) Rozważmy podzbiór M_λ przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ złożony ze wszystkich punktów postaci $\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k$, gdzie $h \in H$ oraz $k \in K_\lambda$. Uzasadnij, że zbiór M_λ jest podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz $T(M_\lambda)$ oraz $\dim M_\lambda$. Dla jakich wartości parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ punkt a należy do M_λ?

Zadanie 3. [10 p.] Wykaż, że układ punktów $p_0, p_1, \ldots, p_k$ przestrzeni afinicznej H nad ciałem K jest afinicznie niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ przestrzeni liniowej $T(H)$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 4. [20 p.] Endomorfizmy f, g przestrzeni liniowej $\mathbb{C}^n$ spełniają warunek $f \circ g = g \circ f \circ f$.

(a) Wykaż, że jeśli $v \notin \ker g$ jest wektorem własnym endomorfizmu f o wartości własnej $\lambda \in \mathbb{C}$, to również λ^2 jest wartością własną f.

(b) Wykaż, że jeśli $\ker f \neq \{0\}$, to endomorfizm g ma wektor własny należący do $\ker f$.

(c) Wykaż, że zachodzi alternatywa: endomorfizm f ma wartość własną $\lambda \in \mathbb{C}$, taką że $|\lambda| = 1$, lub endomorfizmy f oraz g mają wspólny wektor własny.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL II Kolokwium pierwsze, 11 kwietnia 2024

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania (6×5 p.):

1. Endomorfizm ϕ przestrzeni liniowej V wymiaru 5 nad ciałem $\mathbb{R}$ ma wartości własne 2 oraz 3 o krotnościach algebraicznych równych 2. Czy jest możliwe, aby $\det(\phi) < 0$?

2. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest rzędu 1 i ma niezerową wartość własną. Czy A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$?

3. Macierz $T \in M_n(\mathbb{R})$ spełnia równanie $(T + I)(T + 2I) = 0$, gdzie I jest macierzą identycznościową. Czy macierz T może nie mieć rzeczywistych wartości własnych?

Zadanie 5 (c.d.)

4. Macierz $J \in M_4(\mathbb{R})$ jest w postaci Jordana. Wielomian charakterystyczny macierzy J jest równy $w_J(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda)^2$. Wiadomo, że macierz J jest podobna do macierzy J^2. Czy wynika stąd, że macierz J jest diagonalna?

5. Niech $V = \mathrm{lin}(\alpha, \beta, \gamma)$ będzie trójwymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$. Czy przecięcie jej podprzestrzeni afinicznych $H = a + \mathrm{lin}(\alpha, \beta)$ oraz $M = b + \mathrm{lin}(\gamma)$ może być zbiorem pustym?

6. Niech $\mathcal{A} = \{p_0, p_1, p_2\}$ będzie bazą punktową przestrzeni afinicznej H oraz niech q będzie dowolnym punktem należącym do H. Czy q można uzupełnić do bazy punktowej przestrzeni H punktami z $\mathcal{A}$?