

Egzamin z GAL II i GAL II*, 26 czerwca 2024

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania.

Zadanie 1. [20 p.] Rozpatrzmy następujące macierze o wyrazach w ciele $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (10 p.) Które z macierzy B_i są kongruentne z macierzą A nad $\mathbb{R}$, a które są kongruentne z A nad $\mathbb{C}$?
- (10 p.) Znajdź taką macierz odwracalną $C \in M_3(\mathbb{R})$, że macierz $C^T A C$ jest diagonalna i każdy wyraz na przekątnej tej macierzy należy do zbioru $\{-1, 1, 0\}$.

Zadanie 2. [20 p.] Rozpatrzmy formę dwuliniową $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - 2x_1 y_3 + x_2 y_1 - 4x_2 y_3 - 2x_3 y_1 - 4x_3 y_2.$$

(10 p.) Dla $s \in \mathbb{R}$ rozważmy macierze

$$B_s = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & s \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Dla jakich wartości parametru s macierz B_s jest macierzą formy h w pewnej bazie przestrzeni $\mathbb{R}^3$?

- (5 p.) Znajdź maksymalny wymiar podprzestrzeni w $\mathbb{R}^3$ nieosobliwej względem formy h . Podaj przykład takiej podprzestrzeni.
- (5 p.) Znajdź typ afiniczny hiperpowierzchni postaci
- $$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : h((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) + x_3 + 1 = 0\}.$$

Zadanie 3. [10 p.] Wykaż, że macierze $A, B \in M_n(K)$ są kongruentne nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy A, B są macierzami tej samej formy dwuliniowej na przestrzeni K^n (w pewnych bazach).

Zadanie 4. [20 p.] Niech $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie nieokreśloną formą kwadratową na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej nad $\mathbb{R}$.

- (5 p.) Niech $v, w \in V$ będą takie, że $q(v) < 0$ oraz $q(w) > 0$. Wykaż, że v, w są liniowo niezależne.
- (5 p.) Wykaż, że istnieje niezerowy wektor $z \in V$, że $q(z) = 0$.
- (10 p.) Niech $A \in M_2(\mathbb{R})$ będzie macierzą pewnej nieokreślonej formy kwadratowej na przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech $W = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie liniową przestrzenią euklidesową. Wykaż, że dla dowolnego wektora $w \in W$ spełniającego $\langle Aw, w \rangle = 0$ mamy

$$\|Aw\|^2 = -\det(A) \cdot \|w\|^2.$$

Uwaga. Elementy przestrzeni W traktujemy jako wektory kolumnowe, czyli elementy $M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$.

Imię i nazwisko

numer indeksu

grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia

Egzamin z GAL II i GAL II*, 26 czerwca 2024

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania (6×5 p.):

1. Czy suma dwóch wektorów izotropowych jest wektorem izotropowym?

2. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą pewnej ujemnie określonej formy kwadratowej na przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Czy macierz A^2 jest macierzą pewnej dodatnio określonej formy kwadratowej?

3. Endomorfizm T przestrzeni euklidesowej jest samosprężony oraz liczby 2, 3 są jedynymi wartościami własnymi T . Czy wynika stąd, że $T^2 - 5T + 6\text{id} = 0$?

Zadanie 5 (c.d.)

4. Niech α, β będą bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej (V, h) taką, że $h(\alpha, \alpha) = 1$ zaś $h(\beta, \beta) = 0$. Czy istnieje baza α', β' tej przestrzeni taka, że $h(\alpha', \beta') = 1$?

5. Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową wymiaru 3. Dla każdej pary wektorów α, β należących do podprzestrzeni liniowej $W \subset V$ zachodzi $h(\alpha, \beta) = 0$. Czy W może być dwuwymiarowa?

6. Niech K będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Dla jakich $a \in K$ macierze $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ są kongruentne nad K ?