Zadanie 5. [18 pt] W zorientowanej przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^3, \langle\, , \,\rangle_{st})$ dany jest układ ośmiu punktów $p_1, \ldots, p_8$ stanowiących zbiór wierzchołków równoległościanu $R = R(p_1; \overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \overrightarrow{p_1p_5})$, przy czym spełnione są warunki $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_1p_3} = \overrightarrow{p_1p_4}$ oraz $\overrightarrow{p_5p_6} + \overrightarrow{p_5p_7} = \overrightarrow{p_5p_8}$.

(a) Czy z równości $\|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \|\overrightarrow{p_1p_3}\| = \|\overrightarrow{p_1p_5}\|$ wynikają równości $\|\overrightarrow{p_8p_7}\| = \|\overrightarrow{p_8p_6}\| = \|\overrightarrow{p_8p_4}\|$?

(b) Czy z równości $\overrightarrow{p_1p_5} = \overrightarrow{p_1p_2} \times \overrightarrow{p_1p_3}$ wynika równość $\overrightarrow{p_8p_4} = \overrightarrow{p_8p_7} \times \overrightarrow{p_8p_6}$?

(c) Załóżmy, że R jest sześcianem, oraz że dla pewnej płaszczyzny $P \subset \mathbb{R}^3$ odległość punktu p_i od P równa jest i, dla $1 \leqslant i \leqslant 8$. Wyznacz długość krawędzi sześcianu R.

Uwaga. Wierzchołki $R = R(p_1; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ to punkty postaci $p_1 + \epsilon_1\alpha_1 + \epsilon_2\alpha_2 + \epsilon_3\alpha_3$, gdzie $\epsilon_i \in \{0, 1\}$.

Rozwiązanie. Z oznaczmy $\alpha = \overrightarrow{p_1p_2}$, $\beta = \overrightarrow{p_1p_3}$ oraz $\gamma = \overrightarrow{p_1p_5}$. Z warunku $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_1p_3} = \overrightarrow{p_1p_4}$ wynika, że $p_4 = p_1 + \alpha + \beta$ należy do $\mathrm{af}(p_1, p_2, p_3)$, natomiast z warunku $\overrightarrow{p_5p_6} + \overrightarrow{p_5p_7} = \overrightarrow{p_5p_8}$ wynika, że $p_8 = p_5 + \overrightarrow{p_5p_6} + \overrightarrow{p_5p_7}$. Wiedząc dodatkowo, że $p_5 = p_1 + \overrightarrow{p_1p_5}$ dostajemy $p_8 = p_1 + \alpha + \beta + \gamma$. A zatem punkty p_6, p_7 są w pewnej kolejności postaci $p_1 + \alpha + \gamma$ oraz $p_1 + \beta + \gamma$. Będzie to miało znaczenie w (b).

W punkcie (a) odpowiedź jest twierdząca. Z rozważań wyżej wiemy, że $\overrightarrow{p_8p_7} = p_7 - p_8$, czyli jest to wektor $-\beta$ lub $-\alpha$. Podobnie $\overrightarrow{p_8p_6}$ równy jest $-\beta$ lub $-\alpha$. Wreszcie, $\overrightarrow{p_8p_4} = p_4 - p_8 = -\gamma$. Skoro $\|\alpha\| = \|\beta\| = \|\gamma\|$, to $\|\overrightarrow{p_8p_7}\| = \|\overrightarrow{p_8p_6}\| = \|\overrightarrow{p_8p_4}\|$.

Punkt (b) nie jest prawdą. Wiemy, że baza α, β, γ jest zorientowana dodatnio, bowiem $\gamma = \alpha \times \beta$. To oznacza, że również bazy $-\alpha, -\beta, \gamma$ oraz $-\beta, -\alpha, -\gamma$ są zorientowane dodatnio. Mamy $-\gamma = \overrightarrow{p_8p_4}$. W zależności od wyboru p_6, p_7 jako $p_1 + \alpha + \gamma$ oraz $p_1 + \beta + \gamma$ mamy

$$\overrightarrow{p_8p_7} \times \overrightarrow{p_8p_6} = -\beta \times -\alpha \quad \text{lub} \; -\alpha \times -\beta.$$

Tylko jeden z tych iloczynów jest równy $-\gamma$, co kończy argument.

Odpowiedź w punkcie (c) to $\sqrt{21}$. Niech $T(P)^\perp = \mathrm{lin}(\delta)$. Załóżmy też bez straty ogólności, że $\|\delta\| = 1$. Zauważmy, że zgodnie z założeniem rzuty α, β, γ na $\mathrm{lin}(\delta)$ to wektory mające długości odpowiednio $1, 2, 4$. Rzuty te mają jednocześnie postać (odpowiednio):

$$\frac{\langle\, \alpha, \delta \,\rangle}{\|\delta\|^2}\delta, \quad \frac{\langle\, \beta, \delta \,\rangle}{\|\delta\|^2}\delta, \quad \frac{\langle\, \gamma, \delta \,\rangle}{\|\delta\|^2}\delta$$

Liczby $\langle\, \alpha, \delta \,\rangle, \langle\, \beta, \delta \,\rangle, \langle\, \gamma, \delta \,\rangle$ są zatem równe co do modułu odpowiednio $1, 2, 4$.

Skoro R jest sześcianem, to $\|\alpha\| = \|\beta\| = \|\gamma\|$ oraz układ α, β, γ jest prostopadły. To oznacza, że:

$$G(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{bmatrix} \langle\, \alpha, \alpha \,\rangle & \langle\, \alpha, \beta \,\rangle & \langle\, \alpha, \gamma \,\rangle & \langle\, \alpha, \delta \,\rangle \\ \langle\, \beta, \alpha \,\rangle & \langle\, \beta, \beta \,\rangle & \langle\, \beta, \gamma \,\rangle & \langle\, \beta, \delta \,\rangle \\ \langle\, \gamma, \alpha \,\rangle & \langle\, \gamma, \beta \,\rangle & \langle\, \gamma, \gamma \,\rangle & \langle\, \gamma, \delta \,\rangle \\ \langle\, \delta, \alpha \,\rangle & \langle\, \delta, \beta \,\rangle & \langle\, \delta, \gamma \,\rangle & \langle\, \delta, \delta \,\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\alpha\|^2 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \|\alpha\|^2 & 0 & \pm 2 \\ 0 & 0 & \|\alpha\|^2 & \pm 4 \\ \pm 1 & \pm 2 & \pm 4 & 1 \end{bmatrix},$$

przy czym macierz wyżej jest symetryczna. Układ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jest liniowo zależny, czyli $W(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$. Wyznacznik ten jest natomiast równy $\|\alpha\|^6 - 21\|\alpha\|^4$, niezależnie od wyboru znaków $\langle\, \alpha, \delta \,\rangle, \langle\, \beta, \delta \,\rangle, \langle\, \gamma, \delta \,\rangle$. Wynika to z faktu, że przy operacji zamiany jednego z wektorów α, β, γ na przeciwny (co zmieniłoby tylko znak iloczynu skalarnego z δ) wyznacznik Grama się nie zmienia. Skoro $\|\alpha\| > 0$, to $\|\alpha\| = \sqrt{21}$.

Autorem punktu (c) jest Łukasz Bożyk, patrz: `https://www.deltami.edu.pl/delta/archiwum/2018/12/2018/12/04/0-DELTA-2018-12.pdf`, str 3. Elementarne rozwiązanie (jedno z wielu) — na str. 5.