GAL II Kolokwium drugie, 18 maja 2023

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić, aby otrzymać za nią maksymalną liczbę punktów.
• Rozwiązania każdego zadania 1 – 5 TRZEBA oddać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania.

Zadanie 1. [18 pt] Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ rozważmy formę dwuliniową $h_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$h_a((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = ax_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + ax_2y_3 + x_3y_1 + ax_3y_2 + 11x_3y_3.$$

(a) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ forma h_a jest iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$?
(b) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ forma $h_a|_{W\times W}$ jest iloczynem skalarnym na podprzestrzeni $W = \text{lin}((1, 1, 0), (0, 1, 1))$?
(c) Dla $a = 2$ znajdź bazę prostopadłą podprzestrzeni $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h_2)$.

Zadanie 2. [18 pt] W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\, ,\rangle$ dane są dwie proste: $L = (0, 4, 1) + \text{lin}((-1, 2, 0))$ oraz $K = (0, 1, 1) + \text{lin}((1, -1, -1))$.
(a) Znajdź parametryzację obrazu prostej L przy symetrii prostopadłej względem prostej K.
(b) Znajdź wzór rzutu prostopadłego $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ na prostą L.
(c) Znajdź odległość $\rho(L, K)$ pomiędzy prostymi L i K, tzn. minimum odległości $\rho(p, q)$, dla $p \in L, q \in K$.

Zadanie 3. [18 pt] Dane jest przekształcenie afiniczne $f : H \to H$, gdzie $H = (\mathbb{R}^3, \langle\, ,\rangle)$ jest przestrzenią euklidesową afiniczną ze standardowym iloczynem skalarnym, którego pochodna f' dana jest macierzą

$$M(f')^{st}_{st} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wiadomo również, że $f((1, 1, 1)) = (-2, 15, -4)$.

(a) Rozstrzygnij, czy f jest izometrią przestrzeni H.
(b) Rozstrzygnij, czy f posiada punkty stałe, to znaczy punkty $p \in H$ takie, że $f(p) = p$.
(c) W przestrzeni H dany jest sympleks $S(p_0, p_1, p_2, p_3)$ rozpięty na punktach $p_0 = (1, 0, 0)$, $p_1 = (0, 1, 0)$, $p_2 = (0, 0, 1)$ oraz $p_3 = (1, 1, 1)$. Wyznacz objętość sympleksu S oraz objętość sympleksu $f(S)$.

Zadanie 4. [10 pt] Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie układem prostopadłym niezerowych wektorów w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, ,\rangle)$. Wykaż, że układ $\mathcal{A}$ jest bazą V oraz, że dla wektora $\alpha = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n \in V$ mamy:

$$a_1 = \frac{\langle\, \alpha, \alpha_1 \,\rangle}{\langle\, \alpha_1, \alpha_1 \,\rangle}, \quad a_2 = \frac{\langle\, \alpha, \alpha_2 \,\rangle}{\langle\, \alpha_2, \alpha_2 \,\rangle}, \quad \ldots \quad , \quad a_n = \frac{\langle\, \alpha, \alpha_n \,\rangle}{\langle\, \alpha_n, \alpha_n \,\rangle}.$$

Zadanie 5. [18 pt] W zorientowanej przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^3, \langle\, ,\,\rangle_{st})$ dany jest układ ośmiu punktów $p_1, \ldots, p_8$ stanowiących zbiór wierzchołków równoległościanu $R = R(p_1; \overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \overrightarrow{p_1p_5})$, przy czym spełnione są warunki $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_1p_3} = \overrightarrow{p_1p_4}$ oraz $\overrightarrow{p_5p_6} + \overrightarrow{p_5p_7} = \overrightarrow{p_5p_8}$.

(a) Czy z równości $\|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \|\overrightarrow{p_1p_3}\| = \|\overrightarrow{p_1p_5}\|$ wynikają równości $\|\overrightarrow{p_8p_7}\| = \|\overrightarrow{p_8p_6}\| = \|\overrightarrow{p_8p_4}\|$?

(b) Czy z równości $\overrightarrow{p_1p_5} = \overrightarrow{p_1p_2} \times \overrightarrow{p_1p_3}$ wynika równość $\overrightarrow{p_8p_4} = \overrightarrow{p_8p_7} \times \overrightarrow{p_8p_6}$?

(c) Załóżmy, że R jest sześcianem, oraz że dla pewnej płaszczyzny $P \subset \mathbb{R}^3$ rozłącznej z R odległość punktu p_i od P równa jest i, dla $1 \leqslant i \leqslant 8$. Wyznacz długość krawędzi sześcianu R.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL II Kolokwium drugie, 18 maja 2023

Podpisz niniejszą kartkę i wpisz w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×5 pt]:

1. Dana jest skończenie wymiarowa przestrzeń afiniczna H oraz izomorfizm afiniczny $f : H \to H$ taki, że $f(M) \subseteq M$, dla pewnej podprzestrzeni afinicznej $M \subseteq H$. Czy wynika stąd, że $f(M) = M$?

2. W przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\,,\rangle)$ dane są wektory α, β takie, że $\|\alpha\| = 1$, $\|\beta\| = 2$, przy czym kąt między wektorami α i β wynosi $\frac{\pi}{3}$. Oblicz $\|\alpha - 2\beta\|$.

3. W przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\,,\rangle)$ dana jest baza ortonormalna $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ oraz wektory $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3$ i $\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3$, dla pewnych $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. Wyznacz rzut prostopadły wektora β na $\mathrm{lin}(\alpha)$.

4. Niech α, β będą wektorami w zorientowanej trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\, , \rangle)$. Rozstrzygnij, czy baza $(\alpha, \beta \times \alpha, \beta)$ przestrzeni V jest dodatnio zorientowana, czy ujemnie zorientowana?

5. W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym wyznacz równanie takiej płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(4, 3, 5)$, której odległość od punktu $(0, 0, 0)$ jest największa.

6. Niech L_1, L_2, L_3 będą prostymi zawartymi w płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$. Niech α_{ij} będzie kątem (niezorientowanym) pomiędzy wektorami rozpinającymi $T(L_i)$ oraz $T(L_j)$, dla $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Rozstrzygnij, czy wyznacznik macierzy $M \in M_3(\mathbb{R})$ o wyrazach $\cos(\alpha_{ij})$ może być niezerowy?