Zadanie 5. [18 pt] Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{C}$ oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$.

(a) Załóżmy, że A jest macierzą endomorfizmu ϕ w bazie Jordana. Wykaż, że liczba tych klatek Jordana macierzy A odpowiadających wartości własnej a, które są rozmiaru $\geqslant m$ równa jest

$$\dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^m - \dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^{m-1}.$$

(b) Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
  (i) endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny nad ciałem $\mathbb{C}$,
  (ii) dla każdego $a \in \mathbb{C}$ mamy $\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2 = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})$,
  (iii) dla każdego $a \in \mathbb{C}$ mamy $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id}) \cap \ker(\phi - a\,\mathrm{id}) = 0$.

Rozwiązanie. Dowodzimy (a). Zgodnie z twierdzeniem z wykładu liczba klatek Jordana macierzy A endomorfizmu odpowiadających wartości własnej a, które są rozmiaru $\geqslant m$ wynosi

$$q_m = r(A - aI)^{m-1} - r(A - aI)^m.$$

Skoro $A - aI$ jest macierzą endomorfizmu $\phi - a\,\mathrm{id}$, to dla każdego k naturalnego mamy

$$r(A - aI)^k = \dim\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})^k.$$

Korzystamy teraz z tego, że dla dowolnego przekształcenia liniowego $f : V \to V$ przestrzeni skończonego wymiaru mamy $\dim V = \dim\ker f + \dim\mathrm{im}\, f$. W rozważanej sytuacji, kładąc $f = \phi - a\,\mathrm{id}$ mamy:

$$q_m = (n - \dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^{m-1}) - (n - \dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^m) = \dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^m - \dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^{m-1}.$$

Dowodzimy (b). Zauważmy, że jeśli a nie jest wartością własną endomorfizmu ϕ, to $\ker(\phi - a\,\mathrm{id}) = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2 = 0$. A zatem (ii) jest równoważne z założeniem, że równość $\ker(\phi - a\,\mathrm{id}) = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2 = 0$ zachodzi dla wszystkich wartości własnych a endomorfizmu ϕ.

Endomorfizm jest diagonalizowalny nad $\mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy klatki jego macierzy w postaci Jordana mają wszystkie rozmiar 1. Równoważnie, dla każdej wartości własnej a endomorfizmu ϕ mamy $q_2 = 0$, czyli zgodnie z (a):

$$\dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2 = \dim\ker(\phi - a\,\mathrm{id}).$$

Zauważmy, że zawsze zachodzi inkluzja $\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2 \supseteq \ker(\phi - a\,\mathrm{id})$, bowiem jeśli $(\phi - a\,\mathrm{id})(v) = 0$, dla pewnego $v \in V$, to tym bardziej $(\phi - a\,\mathrm{id})^2(v) = 0$. A zatem diagonalizowalność ϕ jest równoważna z tym, że dla każdej wartości własnej a mamy $\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2 = \ker(\phi - a\,\mathrm{id})$. Pokazaliśmy zatem (i) $\iff$ (ii).

Przechodzimy do równoważności (ii) $\iff$ (iii). Załóżmy (ii) i weźmy dowolny wektor v należący do podprzestrzeni $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id}) \cap \ker(\phi - a\,\mathrm{id})$. Stąd $(\phi - a\,\mathrm{id})(v) = 0$. Z drugiej strony skoro $v \in \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id})$, to istnieje wektor $w \in V$ taki, że $(\phi - a\,\mathrm{id})(w) = v$. W szczególności

$$(\phi - a\,\mathrm{id})^2(w) = (\phi - a\,\mathrm{id})(v) = 0.$$

A zatem $w \in \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2$. Na mocy (ii) w należeć też musi do $\ker(\phi - a\,\mathrm{id})$. Stąd $v = (\phi - a\,\mathrm{id})(w) = 0$. Z dowolności wyboru v dostajemy $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id}) \cap \ker(\phi - a\,\mathrm{id}) = 0$, czyli (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Wreszcie, gdy $\mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id}) \cap \ker(\phi - a\,\mathrm{id}) = 0$, wówczas biorąc dowolny element $w \in \ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2$ mamy

$$(\phi - a\,\mathrm{id})(w) \in \mathrm{im}(\phi - a\,\mathrm{id}) \cap \ker(\phi - a\,\mathrm{id}) = 0,$$

czyli $(\phi - a\,\mathrm{id})(w) = 0$ oraz w konsekwencji $w \in \ker(\phi - a\,\mathrm{id})$. A zatem warunek (ii) implikuje inkluzję $\ker(\phi - a\,\mathrm{id})^2 \subseteq \ker(\phi - a\,\mathrm{id})$. Inkluzja przeciwna zachodzi jednak zawsze, jak wspomnieliśmy wyżej. Pokazaliśmy więc implikację (iii) $\Rightarrow$ (ii).