GAL II Kolokwium pierwsze, 30 marca 2023

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić, aby otrzymać za nią maksymalną liczbę punktów.
• Rozwiązania każdego zadania 1 – 5 TRZEBA oddać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania.

Zadanie 1. [18pt] Niech $s \in \mathbb{R}$ oraz niech macierz $A_s \in M_4(\mathbb{R})$ będzie postaci:

$$A_s = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ s & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -s & s \end{bmatrix}.$$

(a) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ macierz A_s jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$?
(b) Wyznacz macierz $(A_3)^{100}$.

Zadanie 2. [18 pt] Niech $H = \mathrm{af}((1,1,2),(0,0,4),(0,1,3),(1,2,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ i niech $p = (-5,16,-7) \in \mathbb{R}^3$. Dana jest także podprzestrzeń afiniczna $L \subseteq \mathbb{R}^3$ opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = 4 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 & = 10 \end{cases}.$$

(a) Znajdź bazę punktową i wymiar przestrzeni H.
(b) Rozstrzygnij, czy $p \in H$ oraz czy $L \subseteq H$?

Zadanie 3. [18 pt] Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ określamy macierz

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & t \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(a) Wyznacz macierz w postaci Jordana podobną do macierzy A_t, w zależności od parametru $t \in \mathbb{R}$.
(b) Dla $t = 3$ znajdź bazę Jordana endomorfizmu $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ spełniającego warunek $M(\phi)_{st}^{st} = A_3$.

Zadanie 4. [10 pt] Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Wykaż, że element $a \in K$ jest wartością własną endomorfizmu ϕ wtedy i tylko wtedy, gdy a jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego endomorfizmu ϕ.

Zadanie 5. [18 pt] Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad ciałem $\mathbb{C}$ oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$.
(a) Załóżmy, że A jest macierzą endomorfizmu ϕ w bazie Jordana. Wykaż, że liczba tych klatek Jordana macierzy A odpowiadających wartości własnej a, które są rozmiaru $\geqslant m$ równa jest

$$\dim\ker(\phi - a \cdot \mathrm{id})^m - \dim\ker(\phi - a \cdot \mathrm{id})^{m-1}.$$

(b) Wykaż, że następujące warunki są równoważne:

- (i) endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny nad ciałem $\mathbb{C}$,
- (ii) dla każdego $a \in \mathbb{C}$ mamy $\ker(\phi - a \cdot \mathrm{id})^2 = \ker(\phi - a \cdot \mathrm{id})$,
- (iii) dla każdego $a \in \mathbb{C}$ mamy $\mathrm{im}(\phi - a \cdot \mathrm{id}) \cap \ker(\phi - a \cdot \mathrm{id}) = 0$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL II Kolokwium pierwsze, 30 marca 2023

Podpisz niniejszą kartkę i wpisz w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6 × 3 pt]:

1. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ oraz niech $\phi \in \mathrm{End}(V)$. Załóżmy, że wektory $v, w, v - w$ przestrzeni V są własne. Czy wartości własne ϕ, którym odpowiadają te wektory mogą być parami różne?

2. Załóżmy, że macierz $A \in M_5(\mathbb{R})$ spełnia warunek $r(A - 2I) = 2$. Czy jest możliwe, aby $r(A + 2I) = 2$?

3. Macierze $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ są podobne. Czy macierze $A + I$ oraz $B - I$ są podobne?

4. Podaj przykład macierzy $A \in M_3(\mathbb{R})$, która ma wartość własną 1, ale która nie jest podobna do żadnej macierzy w postaci Jordana o współczynnikach rzeczywistych.

5. Czy podprzestrzenie afiniczne $\operatorname{af}((0,1,1),(0,1,2),(1,1,1)), \operatorname{af}((2,1,1),(0,1,0),(2,1,2))$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ są równoległe?

6. Podaj parametryzację prostej zawartej w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ przechodzącej przez dwa różne punkty $p_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ oraz $p_1 = (b_1, \ldots, b_n)$.