GAL II Egzamin, 22 czerwca 2023

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić, aby otrzymać za nią maksymalną liczbę punktów.
• Rozwiązania każdego zadania 1 – 5 TRZEBA oddać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko (WIELKIMI LITERAMI), numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania.

Zadanie 1. [40pt] Dla parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ rozważmy macierze $A_{s,t} \in M_4(\mathbb{R})$ postaci

$$A_{s,t} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & t \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ s & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Wykaż, że dla dowolnej pary parametrów (s, t) macierz $A_{s,t}$ nie jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$.
b) Dla $(s, t) = (1, 0)$ wyznacz macierz odwracalną $C \in M_4(\mathbb{R})$, że $C^{-1} \cdot A_{1,0} \cdot C$ jest w postaci Jordana.

Zadanie 2. [40 pt] Rozważmy podprzestrzenie afiniczne euklidesowej przestrzeni afinicznej $H = \mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym:

$$L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1 - x_2 + x_3 = 1\}, \quad L_2 = \mathrm{af}((0, 0, 2), (0, 1, 0), (4, 2, -2)).$$

a) Znajdź obraz punktu $P = (2, 1, 3)$ w symetrii prostopadłej względem L_1.
b) Ile jest izometrii $f : H \to H$ takich, że $f(L_1) = L_1$ oraz $f(L_2) = L_2$? Wypisz macierze pochodnych tych izometrii w wybranej przez siebie bazie ortonormalnej.

Zadanie 3. [40 pt] Na przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dana jest forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, która w bazie standardowej ma macierz

$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

a) Znajdź rząd i sygnaturę formy h.
b) Wyznacz bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$.
c) Czy istnieje baza przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$ złożona z wektorów izotropowych?

Zadanie 4. [40 pt] Dla każdego parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ określamy formę kwadratową $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ wzorem

$$q((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + 4x_1x_2 + \lambda x_2^2 + 8x_2x_3 - x_3^2.$$

a) Dla jakich wartości parametru λ forma q jest ujemnie określona?
b) Dla $\lambda = 0$ wyznacz bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której forma q ma postać diagonalną.
c) Rozważmy powyższą formę kwadratową q dla $\lambda = -20$. Określ typ afiniczny hiperpowierzchni stopnia 2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ opisanej w standardowym układzie bazowym równaniem $q((x_1, x_2, x_3)) + x_2 + 1 = 0$.

Zadanie 5. [10 pt] Wykaż, że macierze $A, B \in M_n(K)$ są kongruentne nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy A, B są macierzami tej samej formy dwuliniowej na przestrzeni K^n (w pewnych bazach).

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL II Egzamin, 22 czerwca 2023

Podpisz niniejszą kartkę i wpisz w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6 $\times$ 5 pt]:

1. Macierz $A \in M_n(K)$ ma niezerową wartość własną oraz jej rząd jest równy 1. Wykaż, że macierz A jest diagonalizowalna nad K.

2. Niech $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ będzie przekształceniem afinicznym. Wykaż, że jeśli $f(p) = q$, dla pewnych punktów $p \in \mathbb{R}^m$ oraz $q \in \mathbb{R}^n$, to $f^{-1}(q) = p + \ker(f')$.

3. Macierz rzeczywista $A \in M_n(\mathbb{R})$ ma n parami prostopadłych wektorów własnych należących do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Czy wynika stąd, że macierz A jest symetryczna?

4. Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową taką, że dla każdej niezerowej podprzestrzeni W przestrzeni liniowej V zachodzi $\dim W + \dim W^\perp > \dim V$. Czy wynika stąd, że h jest formą zerową?

5. Dane są takie liczby rzeczywiste $s, t \neq 0$, że formy kwadratowe $q_1, q_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dane wzorami $q_1((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + sx_4^2$ oraz $q_2((x_1, x_2, x_3, x_4)) = x_1^2 + x_2^2 + tx_3x_4$ są równoważne. Pokaż, że $s < 0$.

6. Macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest ortogonalna i nie ma wartości własnej równej -1. Wykaż, że zamieniając znaki wyrazów w dowolnym (jednym) wierszu lub (jednej) kolumnie macierzy A na przeciwne dostajemy macierz B, posiadającą wartość własną -1.