GAL II Kolokwium 2, 19 maja 2022, rozwiązania

Zadanie 1. [18 pt] W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ rozważamy podprzestrzenie afiniczne
$$L = \mathrm{af}((1,1,1),(3,5,4)), \quad H : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4.$$
Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na H wzdłuż L oraz niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o środku $(5,5,5)$ i skali 3.

a) Znaleźć obraz punktu $p = (0,1,1)$ w przekształceniu $g \circ f$.

b) Wyznaczyć wzór przekształcenia f.

Rozwiązanie. Mamy $T(L) = \mathrm{lin}(2,4,3)$. Obraz punktu p przy f to taki punkt postaci $p + t(2,4,3)$, który należy do H. Punkt $(2t, 4t+1, 3t+1)$ spełnia równanie $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$ dla $t = 1$. Zatem
$$f((0,1,1)) = (2,5,4).$$
Aby wyznaczyć $g((2,5,4))$ korzystamy z definicji jednokładności. Mamy:
$$3((5,5,5) - (2,5,4)) = (5,5,5) - g(2,5,4) \Rightarrow g(2,5,4) = (-4,5,2).$$
Przechodzimy do (b). Zaczniemy od przesadnie rachunkowego, ale uniwersalnego sposobu rozwiązania. Mamy $T(L) = \mathrm{lin}(2,4,3)$, zaś przestrzeń $T(H)$ jest opisana równaniem $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, czyli np. $T(H) = \mathrm{lin}((0,1,1),(2,0,1))$. Mamy zatem bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której pierwszy element rozpina $T(L)$, a kolejne dwa rozpinają $T(H)$:
$$\mathcal{A} = ((2,4,3),(0,1,1),(2,0,1)).$$
Pochodna f' jest rzutem $\mathbb{R}^3$ na $T(H)$ wzdłuż $T(L)$, czyli
$$M(f')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Wyznaczamy $M(f')_{st}^{st}$ ze wzoru
$$M(f')_{st}^{st} = M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st} \cdot M(f')_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \cdot M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}}.$$
Mamy:
$$M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{oraz } M(\mathrm{id})_{st}^{\mathcal{A}} = (M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$
Zatem:
$$M(f')_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$
Oczywiście f przeprowadza każdy punkt z H na siebie, a więc mamy na przykład
$$f((4,0,0)) = (4,0,0).$$
Mamy więc, dla dowolnego punktu $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$:
$$f(x_1,x_2,x_3) = (4,0,0) + f'((x_1,x_2,x_3) - (4,0,0)) = (4,0,0) + f'(x_1 - 4, x_2, x_3) =$$
$$= (4,0,0) + \left(\frac{1}{2}(x_1 - 4) - x_2 + x_3, -(x_1 - 4) - x_2 + 2x_3, -\frac{3}{4}(x_1 - 4) - \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}x_1 - x_2 + x_3 + 2, -x_1 - x_2 + 2x_3 + 4, -\frac{3}{4}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 3\right)$$

* * *

Mniej rachunkowy sposób jest następujący. Obrazem punktu (x_1,x_2,x_3) przy rzucie f jest taki punkt $f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_2,x_3) + t(2,4,3)$, który należy do H. A zatem wyznaczamy t za pomocą x_1,x_2,x_3 rozwiązując równanie $(x_1 + 2t) + 2(x_2 + 4t) - 2(x_3 + 3t) = 4$, czyli równoważnie $4t = 4 - x_1 - 2x_2 + 2x_3$. Zatem
$$f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_2,x_3) + (1 - \frac{x_1}{4} - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2})(2,4,3).$$

Zadanie 2. [18pt] Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$ określamy funkcję $h_a : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$h_a((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + ax_4y_4.$$

a) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja h_a jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}^4$?

b) Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3\}$. W przestrzeni $(\mathbb{R}^4, h_1)$ znaleźć bazę przestrzeni $T(M)^\perp$ oraz znaleźć odległość punktu $p = (1, 0, 0, 0)$ od przestrzeni afinicznej M.

Rozwiązanie. Rozważmy macierz $G \in M_4(\mathbb{R})$ o wyrazach $h_a(\epsilon_i, \epsilon_j)$, gdzie $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ jest bazą standardową:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Główne minory wiodące tej macierzy to wyznaczniki macierzy:

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix},$$

czyli liczby $1, 4 - a^2, 2(4 - a^2)$ oraz $(4 - a^2)(2a - 2)$. Liczby te są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie warunki $|a| < 2$ oraz $2a - 1 > 0$, czyli gdy $a \in (\frac{1}{2}, 2)$. Funkcja h_a spełnia zatem warunki kryterium Sylvestera dla takich właśnie wartości parametru a.

Przechodzimy do rozwiązania (b). Przestrzeń M jest warstwą przestrzeni $T(M)$ opisanej równaniem

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Weźmy bazę tej przestrzeni postaci:

$$\gamma_1 = (-1, 1, 0, 0), \quad \gamma_2 = (-1, 0, 1, 0), \quad \gamma_3 = (-1, 0, 0, 1)$$

Szukamy wszystkich wektorów $\delta = (d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{R}^4$ takich, ż $h_1(\gamma_i, \delta) = 0$. Równoważnie możemy te warunki przepisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd $d_2 = d_3 = 0$ oraz $d_1 = d_4$. A zatem $T(M)^\perp = \mathrm{lin}(1, 0, 0, 1)$, czyli jej bazą jest np. $\{(1, 0, 0, 1)\}$.

Weźmy punkt $q = (3, 0, 0, 0) \in M$. Odległość punktu p od M równa jest długości rzutu wektora łączącego $\overrightarrow{pq} = (2, 0, 0, 0)$ na $T(M)^\perp$. Skoro $T(M)^\perp = \mathrm{lin}(1, 0, 0, 1)$, to szukany rzut ma postać:

$$\frac{h_1((2, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 1))}{h_1((1, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1))} \cdot (1, 0, 0, 1).$$

Mamy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Stąd szukany rzut ma postać $(2, 0, 0, 2)$ Kwadrat jego normy wyznaczamy licząc $h_1((2, 0, 0, 2), (2, 0, 0, 2))$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 8.$$

Zatem szukana odległość punktu $(3, 0, 0, 0)$ od M w $(\mathbb{R}^4, h_1)$ to $2\sqrt{2}$.

Zadanie 3. [18 pt] W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest prosta $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((1, 2, 1))$ oraz punkt $p_0 = (-3, -1, 1)$.

a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje izometria $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniająca warunki $f(L) = L$ oraz $f(p_0) = (s, 1, -s)$?

b) Ile jest izometrii $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takich, że $g((0, 0, 1)) = (0, 0, 1)$ oraz dla każdego punktu $p \in L$ mamy $g(p) = p$? Dla każdej takiej izometrii obliczyć $g((0, 0, 0))$.

Rozwiązanie. Zacznijmy od (a). Izometria to przekształcenie zachowujące odległość. Zauważmy, że skoro prosta L przechodzi przy f na siebie, to odległość punktów $p_0 = (-3, -1, 1)$ oraz $(s, 1, -s)$ od prostej L musi być jednakowa. Odległość punktu od prostej L to norma rzutu ortogonalnego wektora łączącego ten punkt z dowolnym punktem L na $T(L)^\perp$. Wektor łączący $(-3, -1, 1)$ oraz punkt $(0, 1, 0) \in L$ to $(3, 2, -1)$. Przestrzeń $T(L)^\perp$ opisana jest równaniem $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Baza ortogonalna tej przestrzeni to $(1, 0, -1)$ oraz $(1, -1, 1)$. A zatem rzut ortogonalny $(3, 2, -1)$ na $T(L)^\perp$ to :

$$\frac{\langle (3, 2, -1), (1, 0, -1)\rangle}{\langle (1, 0, -1), (1, 0, -1)\rangle} \cdot (1, 0, -1) + \frac{\langle (3, 2, -1), (1, -1, 1)\rangle}{\langle (1, -1, 1), (1, -1, 1)\rangle} \cdot (1, -1, 1) = (2, 0, -2).$$

Wektor łączący $(s, 1, -s)$ z $(0, 1, 0)$ to $(s, 0, -s) \in T(L)^\perp$. A zatem aby f było izometrią potrzeba, aby $\|(2, 0, -2)\| = \|(s, 0, -s)\|$, czyli $s = \pm 2$.

Pokażmy, że dla $s = \pm 2$ rozważane izometrie istnieją. Rozważmy wektor łączący punkt $(0, 1, 0)$ z punktem $f(p_0) = (s, 1, -s)$. Jest to wektor $(s, 0, -s) \in T(L)^\perp$, bo przestrzeń $T(L)^\perp$ opisana jest równaniem $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Skoro $f(L) = L$, to $(0, 1, 0) = f(q_0)$, dla pewnego $q_0 = (0, 1, 0) + t(1, 2, 1) \in L$. Skoro wektor łączący $f(q_0)$ oraz $f(p_0)$ jest prostopadły do $T(L)$, to wobec faktu, że f' jest izometrią (zachowującą iloczyn skalarny), również wektor łączący q_0 oraz $p_0 = (-3, -1, 1)$ musi być prostopadły do L. Mamy $\overrightarrow{q_0p_0} = (t, 2t + 1, t) - (-3, -1, 1) = (t + 3, 2t + 2, t - 1)$. Ten wektor należy do $T(L)^\perp$, jeśli spełnia równanie $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, czyli $t + 3 + 4t + 4 + t - 1 = 0$, co daje $t = -1$. Stąd

$$q_0 = (-1, -1, -1), \quad f((-1, -1, -1)) = (0, 1, 0).$$

A zatem na prostej L przekształcenie f jest przesunięciem o wektor $(1, 2, 1)$. Dla parametru $s = -2$ mamy $f((-3, -1, 1)) = (-2, 1, 2)$, a więc za szukaną izometrię f na $\mathbb{R}^3$ można wziąć przesunięcie o wektor $(1, 2, 1)$. Dla $s = 2$ niech f będzie przesunięciem o wektor $(1, 2, 1)$ złożonym z odbiciem względem prostej L wzdłuż $T(L)^\perp \ni \mathrm{lin}(1, 0, -1)$. Wtedy f to izometria, $f(L) = L$ oraz $f((-3, -1, 1)) = (2, 0, -2)$, bo przy tym odbiciu punkt $(-2, 1, 2) = (0, 1, 0) + (-2, 0, 2)$ przechodzi na $(0, 1, 0) - (-2, 0, 2) = (2, 1, -2)$.

Przechodzimy do punktu (b). Skoro dla każdego $p \in L$ mamy mieć $g(p) = p$, to w szczególności $g((0, 1, 0)) = (0, 1, 0)$ oraz $g(-1, -1, -1) = (-1, -1, -1)$. Mamy też oczywiście $g((0, 0, 1)) = (0, 0, 1)$. W rezultacie $g'((0, 1, -1)) = (0, 1, -1)$ oraz $g'((1, 2, 1)) = (1, 2, 1)$, czyli g' jest identycznością na

$$\mathrm{lin}((0, 1, -1), (1, 2, 1)).$$

Przestrzeń prostopadła do tej dwuwymiarowej przestrzeni stałej (dla g') jest jednowymiarowa i złożona z wektorów (x_1, x_2, x_3) spełniających:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

czyli jest to przestrzeń $\mathrm{lin}((-3, 1, 1))$. Ta przestrzeń jest niezmiennicza przy izometrii g', bo izometria zachowuje prostopadłość. Zatem wektor $(-3, 1, 1)$ przechodzi na $t(-3, 1, 1)$, dla pewnego t. Jednak jego norma nie zmienia się przy izometrii, więc $t = \pm 1$. Obrazem $(-3, 1, 1)$ przy g' musi być więc $(-3, 1, 1)$ lub $(3, -1, -1)$. Mamy zatem dwie izometrie g spełniające warunki zadania. Rozważmy je osobno.

- Jeśli $g'((-3, 1, 1)) = (-3, 1, 1)$, to $g' = \mathrm{id}$ i skoro $g((0, 0, 1)) = (0, 0, 1)$, to dostajemy $g = \mathrm{id}$. Stąd
$$g((0, 0, 0)) = (0, 0, 0).$$
- Jeśli $g'((-3, 1, 1)) = (3, -1, -1)$, to g' jest symetrią prostopadłą względem płaszczyzny T postaci $(0, 0, 1) + \mathrm{lin}((0, 1, -1), (1, 2, 1))$. Płaszczyzna ta jest opisana równaniem $-3x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Rzut prostopadły $(0, 0, 0)$ na tą płaszczyznę to pewien punkt $(0, 0, 0) + t(-3, 1, 1)$, który spełnia równanie wyżej. Stąd $t = \frac{1}{11}$. A zatem obraz $(0, 0, 0)$ w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny T to punkt
$$(0, 0, 0) + \frac{2}{11}(-3, 1, 1) = \left(-\frac{6}{11}, \frac{2}{11}, \frac{2}{11}\right) = g((0, 0, 0)).$$

Zadanie 5. [18 pt] Zbiór punktów $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ ma następującą własność: odległość dowolnych dwóch różnych punktów tego zbioru równa jest 1.

a) Niech $\alpha_i = \overrightarrow{p_0p_i}$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wyznaczyć macierz Grama $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

b) Pokazać, że układ punktów $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ jest bazą punktową przestrzeni afinicznej $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$.

c) Dla każdego $0 < k < n$ określamy $L_k = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, $S_k = \mathrm{af}(p_{k+1}, \ldots, p_n)$. Wykazać, że $L_k \cap S_k = \emptyset$. Dla $n = 3$ wyznaczyć odległość prostych $\mathrm{af}(p_0, p_1)$ oraz $\mathrm{af}(p_2, p_3)$.

Rozwiązanie. Zacznijmy od (a). Zauważmy, że $\alpha_i - \alpha_j = \overrightarrow{p_0p_i} - \overrightarrow{p_0p_j} = \overrightarrow{p_jp_i}$. Przypomnijmy, że dla wektorów α, β przestrzeni euklidesowej mamy:

$$2\langle\alpha, \beta\rangle = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - \|\alpha - \beta\|^2 \quad\Rightarrow\quad 2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle = \|\overrightarrow{p_0p_i}\|^2 + \|\overrightarrow{p_0p_i}\|^2 - \|\overrightarrow{p_jp_i}\|^2.$$

Dowodzimy (b). To, że $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ jest bazą punktową $\mathbb{R}^n$ jest równoważne temu, że $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest bazą $\mathbb{R}^n$. Zgodnie z twierdzeniem z wykładu jest równoważne temu, że macierz Grama $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest odwracalna. To z kolei pokazujemy dowodząc, że $r(G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = n$. Robimy to przez operacje elementarne. Wypisujemy macierz $2G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i odejmujemy ostatni wiersz od poprzednich. Dostajemy:

$$r\begin{bmatrix} 2 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jest jasne, że pierwsze $n - 1$ wierszy uzyskanej macierzy jest liniowo niezależnych, a ostatni nie jest kombinacją liniową wcześniejszych (patrz pierwsze $n - 1$ współrzędnych). Stąd mamy tezę.

Dowodzimy (c). Załóżmy przeciwnie, że dla pewnych układów wag $a_0, \ldots, a_k$ oraz $b_{k+1}, \ldots, b_n$ mamy

$$a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_kp_k = b_{k+1}p_{k+1} + \ldots + b_np_n.$$

Mamy $a_0 + a_1 + \ldots + a_k - b_{k+1} - \ldots - b_n = 1 - 1 = 0$ i wyrażenie wyżej można równoważnie przekształcić:

$$\begin{aligned} &a_0p_0 + a_1p_1 + \ldots + a_kp_k - b_{k+1}p_{k+1} - \ldots - b_np_n + (a_0 + a_1 + \ldots + a_k - b_{k+1} - \ldots - b_n)p_0 = \\ &a_1\overrightarrow{p_0p_1} + a_2\overrightarrow{p_0p_2} + \ldots + a_k\overrightarrow{p_0p_k} - b_{k+1}\overrightarrow{p_0p_{k+1}} - \ldots - b_n\overrightarrow{p_0p_n} = \\ &a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k - b_{k+1}\alpha_{k+1} - \ldots - b_n\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

Jednak jedna z liczb a_i, b_j jest niezerowa, a układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jest liniowo niezależny. Sprzeczność.

Przechodzimy do ostatniej części. Niech $K = \mathrm{af}(p_0, p_1)$ oraz $L = \mathrm{af}(p_2, p_3)$. Mamy

$$T(K) = \alpha_1, \quad T(L) = \overrightarrow{p_2p_3} = \overrightarrow{p_0p_3} - \overrightarrow{p_0p_2} = \alpha_3 - \alpha_2.$$

Odległość d prostych K oraz L równa jest długości rzutu wektora łączącego dowolne dwa jej punkty na przestrzeń prostopadłą do $\mathrm{lin}(T(K), T(L))$. Ten wektor łączący to może być np. $\overrightarrow{p_0p_3} = \alpha_3$, zaś owa przestrzeń, na którą rzutujemy to $\mathrm{lin}(\alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2)^\perp$. Zgodnie z twierdzeniem z wykładu (typu „objętość = podstawa x wysokość") mamy:

$$d = \sqrt{\frac{W(\alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, \alpha_3)}{W(\alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2)}}.$$

Bez trudu wyznaczamy

$$G(\alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, \alpha_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

skąd szukana odległość to $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Uwaga 1. Idea geometryczna: realizując wierzchołki czworościanu foremnego jako wierzchołki sześcianu o krawędzi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (krawędzie czworościanu to przekątne ścian bocznych sześcianu) dostajemy uzyskaną odpowiedź, bo szukana odległość prostych równa jest odległości przeciwległych ścian sześcianu.

Uwaga 2. Zachęcam Czytelnika do pokazania, że $\rho(L_k, S_k)$ równa jest, w zależności od n:

$$\sqrt{\frac{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_n - \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n - \alpha_{n-1}, \alpha_n)}{W(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_n - \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n - \alpha_{n-1})}} = \sqrt{\frac{n+1}{2(k+1)(n-k)}}.$$

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące sześć pytań [6×3 pt]:

1. Załóżmy, że przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ ma dokładnie jeden punkt stały, tzn istnieje dokładnie jeden punkt $p_0 \in H$ taki, że $f(p_0) = p_0$. Pokazać, że nie istnieje niezerowy wektor $v \in T(H)$, że $f'(v) = v$.

Odpowiedź: W przeciwnym razie mielibyśmy $f(p_0 + v) = f(p_0) + f'(v) = p_0 + v$, czyli również punkt $p_0 + v \in H$ byłby różnym od p_0 punktem stałym f, co przeczy jedyności p_0.

2. Pokazać, że istnieje więcej niż jedna macierz ortogonalna $Q \in M_3(\mathbb{R})$ spełniająca warunek

$$Q \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź: Zauważmy, że w $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym wektory $(3, 0, 4)$ oraz $(5, 0, 0)$ mają równe normy. Wystarczy więc, aby Q było macierzą takiej izometrii w bazie standardowej, która przeprowadza $(3, 0, 4)$ na $(5, 0, 0)$. Jedną jest oczywiście obrót. Inną (bo mającą ujemny wyznacznik) – symetria względem dwusiecznej kąta utworzonego przez te wektory.

3. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Podprzestrzeń W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym złożona jest z wektorów postaci Av, gdzie $v \in \mathbb{R}^n$. Uzasadnić, że podprzestrzeń $W^\perp$ złożona jest z rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o macierzy A^T.

Rozwiązanie: Przestrzeń W rozpięta jest przez kolumny macierzy A, a zatem również przez wiersze macierzy A^T. Niech $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ będzie wierszem macierzy A^T. Wektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ jest prostopadły do α wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$.

4. Wskazać za pomocą wzoru przykład iloczynu skalarnego $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takiego, by układ wektorów $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, -1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 1)$ był bazą ortogonalną $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

Odpowiedź: Rozważmy macierz $G \in M_3(\mathbb{R})$ postaci

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Z kryterium Sylvestera główne minory wiodące tej macierzy to odpowiednio $1, 1, 1$. Jest to więc macierz Grama iloczynu skalarnego $\langle , \rangle$ danego wzorem $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_1 + x_2 y_2 + 2 x_3 y_3$. Łatwo widzieć, że $\langle (1, 0, 0), (0, -1, 0) \rangle = \langle (1, 0, 0), (1, 0, 1) \rangle = \langle (1, 0, 1), (0, -1, 0) \rangle = 0$.

5. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym zorientowanej zgodnie z bazą standardową podać przykład wektora α takiego, że $(1, -1, 0) \times \alpha = (1, 1, 0)$.

Odpowiedź: Jest to na przykład wektor $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Jest on prostopadły do $(1, 1, 0)$ i nie jest wielokrotnością $(1, -1, 0)$. Ma on normę 1, a więc $\|(1, -1, 0) \times \alpha\| = \|(1, 1, 0)\|$. Wreszcie, układ wektorów $\mathcal{A} = ((1, -1, 0), (1, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}))$ jest bazą $\mathbb{R}^3$ oraz

$$M(\mathrm{id})^{st}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Macierz ta ma niewątpliwie dodatni wyznacznik, więc baza $\mathcal{A}$ jest dodatnio zorientowana i rzeczywiście α spełnia równanie wyżej.

6. Macierz Grama bazy standardowej $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ jest równa:

$$G(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć kosinus kąta θ pomiędzy wektorami $\alpha = (2, 1, -4)$ oraz $\beta = (1, -1, 3)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

Odpowiedź: Szukany kosinus równy jest $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Wyznaczamy go z zależności $\|\alpha\| \cdot \|\beta\| \cdot \cos\theta = \langle \alpha, \beta \rangle$. Mamy $\|\alpha\| = \sqrt{1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot (-4)^2} = \sqrt{54}$ oraz $\|\beta\| = \sqrt{1 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 3^2} = \sqrt{30}$, a także $\langle \alpha, \beta \rangle = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) \cdot 3 = -36$. Stąd

$$\cos\theta = \frac{-36}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{54}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$