GAL II Kolokwium 2, 19 maja 2022

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego i numer zadania.

Zadanie 1. [18 pt] W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ rozważamy podprzestrzenie afiniczne

$$L = \mathrm{af}((1,1,1),(3,5,4)), \quad H : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4.$$

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na H wzdłuż L oraz niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o środku $(5,5,5)$ i skali 3.

a) Znaleźć obraz punktu $p = (0,1,1)$ w przekształceniu $g \circ f$.

b) Wyznaczyć wzór przekształcenia f.

Zadanie 2. [18pt] Dla dowolnych $a \in \mathbb{R}$ określamy funkcję $h_a : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$h_a((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) = x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + ax_4y_4.$$

a) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ funkcja h_a jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}^4$?

b) Niech $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3\}$. W przestrzeni $(\mathbb{R}^4, h_1)$ znaleźć bazę przestrzeni $T(M)^\perp$ oraz znaleźć odległość punktu $p = (1,0,0,0)$ od przestrzeni afinicznej M.

Zadanie 3. [18 pt] W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest prosta $L = (0,1,0) + \mathrm{lin}((1,2,1))$ oraz punkt $p_0 = (-3,-1,1)$.

a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje izometria $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniająca warunki $f(L) = L$ oraz $f(p_0) = (s,1,-s)$?

b) Ile jest izometrii $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takich, że $g((0,0,1)) = (0,0,1)$ oraz dla każdego punktu $p \in L$ mamy $g(p) = p$? Dla każdej takiej izometrii obliczyć $g((0,0,0))$.

Zadanie 4. [10 pt] Niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie układem prostopadłym niezerowych wektorów w przestrzeni euklidesowej $(V, \langle\, , \rangle)$.

(a) Pokazać, że układ $\mathcal{A}$ jest liniowo niezależny.

(b) Załóżmy, że $\mathcal{A}$ jest bazą prostopadłą $(V, \langle\, , \rangle)$. Wypisać współrzędne dowolnego wektora $\alpha \in V$ w bazie $\mathcal{A}$, używając iloczynów skalarnych wektorów $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 5. [18 pt] Zbiór punktów $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$ ma następującą własność: odległość dowolnych dwóch różnych punktów tego zbioru równa jest 1.

a) Niech $\alpha_i = \overrightarrow{p_0p_i}$, dla $i = 1, \ldots, n$. Wyznaczyć macierz Grama $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

b) Pokazać, że układ punktów $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ jest bazą punktową przestrzeni afinicznej $(\mathbb{R}^n, \langle\, , \rangle)$.

c) Dla każdego $0 < k < n$ określamy $L_k = \mathrm{af}(p_0, \ldots, p_k)$, $S_k = \mathrm{af}(p_{k+1}, \ldots, p_n)$. Wykazać, że

$$L_k \cap S_k = \emptyset.$$

Dla $n = 3$ wyznaczyć odległość prostych $\mathrm{af}(p_0, p_1)$ oraz $\mathrm{af}(p_2, p_3)$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL II Kolokwium 2, 19 maja 2022

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące sześć pytań [6 × 3 pt]:

1. Załóżmy, że przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ ma dokładnie jeden punkt stały, tzn istnieje dokładnie jeden punkt $p_0 \in H$ taki, że $f(p_0) = p_0$. Pokazać, że nie istnieje niezerowy wektor $v \in T(H)$, że $f'(v) = v$.

2. Pokazać, że istnieje więcej niż jedna macierz ortogonalna $Q \in M_3(\mathbb{R})$ spełniająca warunek

$$Q \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$. Podprzestrzeń W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym złożona jest z wektorów postaci Av, gdzie $v \in \mathbb{R}^n$. Uzasadnić, że podprzestrzeń $W^\perp$ złożona jest z rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych o macierzy A^T.

UWAGA! Pytania 4-6 znajdują się na drugiej stronie kartki.

4. Wskazać za pomocą wzoru przykład iloczynu skalarnego $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takiego, by układ wektorów $\alpha_1 = (1, 0, 0), \alpha_2 = (0, -1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 1)$ był bazą ortogonalną $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.

5. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym zorientowanej zgodnie z bazą standardową podać przykład wektora α takiego, że $(1, -1, 0) \times \alpha = (1, 1, 0)$.

6. Macierz Grama bazy standardowej $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ jest równa:

$$G(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć kosinus kąta θ pomiędzy wektorami $\alpha = (2, 1, -4)$ oraz $\beta = (1, -1, 3)$ w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$.