GAL II Kolokwium 1, 31 marca 2022, rozwiązania

Zadanie 1. [18pt] Dla każdego $t \in \mathbb{C}$ określamy macierz

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

a) Dla jakich wartości parametru t macierz A_t jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$?

b) Niech $B = A_1$. Wyznaczyć B^{100}.

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny macierzy A_t ma postać:

$$w_{A_t}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & t \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & t-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(t-\lambda) + t - \lambda = (\lambda^2+1)(t-\lambda).$$

Dla $t \neq -i, i$ powyższy wielomian ma trzy różne pierwiastki, a więc macierz A_t jest diagonalizowalna na mocy faktu z wykładu. Do rozpatrzenia pozostały zatem przypadki gdy $t = -i$ oraz gdy $t = i$.

- Dla $t = -i$ macierz A_{-i} ma wartości własne $-i$ oraz i. Ponadto:

$$r(A_{-i} + iI) = r\begin{bmatrix} i & 0 & -i \\ 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad r(A_{-i} - iI) = r\begin{bmatrix} -i & 0 & -i \\ 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -2i \end{bmatrix} = 2.$$

  a zatem $\dim V_{(-i)} = 1$ oraz $\dim V_{(i)} = 1$. Stąd suma wymiarów podprzestrzeni własnych endomorfizmu zadanego macierzą A_{-i} nie jest równa 3, czyli macierz A_{-i} nie jest diagonalizowalna.

- Dla $t = i$ macierz A_i ma wartości własne $-i$ oraz i. Możemy rozumować podobnie jak dla $t = -i$ lub zauważyć, że macierz A_i powstaje przez sprzężenie zespolone każdego wyrazu z A_{-i}. W skrócie: $A_i = \overline{A_{-i}}$. Przy tej definicji mamy $\overline{XY} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$, dla dowolnych $X, Y \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. A zatem gdyby istniała macierz odwracalna $C \in M_3(\mathbb{C})$ oraz macierz diagonalna $D \in M_3(\mathbb{C})$ taka, że $A_i = C^{-1}DC$, to $A_{-i} = \overline{A_i} = \overline{C^{-1}DC} = \overline{C}^{-1} \cdot \overline{D} \cdot \overline{C}$, czyli również A_{-i} byłaby diagonalizowalna (i podobna do macierzy diagonalnej $\overline{D}$). W rezultacie macierz A_i nie jest diagonalizowalna.

Uwaga. Każda z macierzy $A_{-i} - iI, A_{-i} + iI, A_i - iI, A_i + iI$ jest postaci:

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix},$$

więc skoro żadna z nich nie jest maksymalnego rzędu, to każda musi być rzędu 2. Zatem wymiary rozważanych podprzestrzeni własnych endomorfizmów zadanych macierzami A_{-i} oraz A_i wynoszą 1.

Przechodzimy do rozwiązania punktu (b).
Sposób 1. Wiemy już, że $B = A_1$ jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$. Ma ona wartości własne $1, i, -i$. A zatem

$$B^{100} = C^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}^{100} \cdot C,$$

gdzie C jest macierzą odwracalną. Zauważmy, że już czwarta potęga macierzy diagonalnej mającej na przekątnej $1, i, -i$ równa jest macierzy identycznościowej I. A zatem $B^{100} = C^{-1} \cdot I \cdot C = I$.

Uwaga. Nietrudno sprawdzić, że dla endomorfizmu $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ danego w bazach standardowych macierzą B mamy $V_{(1)} = (1, 0, 1)$, $V_{(i)} = (1, -(1+i), i)$, $V_{(-i)} = (1, -(1-i), -i)$. Stąd mamy

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(1+i) & -(1-i) \\ 1 & i & -i \end{bmatrix}.$$

Znajomość bazy $\mathbb{C}^3$ złożonej z wektorów własnych endomorfizmu zadanego macierzą B nie jest konieczna do przeprowadzenia powyższego rozwiązania (ale jest przydatna przy innych postaciach diagonalnych).

Sposób 2. Zauważmy, że $w_B = (\lambda^2+1)(1-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$, co na mocy twierdzenia Cayleya-Hamiltona oznacza, że $-B^3 + B^2 - B + I = 0 \Rightarrow B^4 = I$. A zatem $B^{100} = I$.

Zadanie 2. [18 pt] Dla każdego $s \in \mathbb{R}$ określamy macierz:

$$X_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

a) Wyznaczyć macierz w postaci Jordana podobną do macierzy X_s, w zależności od parametru s.

b) Znaleźć bazę Jordana endomorfizmu $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ zadanego warunkiem $\mathrm{M}(\phi)_{st}^{st} = X_1$.

Rozwiązanie. Wielomian charakterystyczny macierzy X_s ma postać:

$$w_{X_s}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 0 & s-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)(s-\lambda).$$

Endomorfizm $\phi_s \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ dany w bazie standardowej macierzą X_s ma zatem wartości własne $1, 2, s$. Rozważamy osobno przypadek, gdy $s = 2$ oraz przypadek gdy $s \neq 2$.

- Przypadek 1, dla $s = 2$. Wówczas obydwie wartości własne $1, 2$ endomorfizmu ϕ_2 mają krotności algebraiczne 2. Mamy też:

$$r(X_2 - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3, \quad r(X_2 - 2I) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

  A zatem macierz X_2 można sprowadzić do macierzy w postaci Jordana o 1 klatce rozmiaru 2×2 odpowiadającej wartości własnej 1 oraz o dwóch klatkach 1×1 odpowiadających wart. własnej 2.

- Przypadek 2, dla $s \neq 2$. Mamy

$$r(X_s - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3.$$

  A zatem dla $s \neq 2$ mamy jedną klatkę odpowiadającą wartości własnej 1. Dostajemy zatem dwa przypadki:
  - Dla $s = 1$ macierz X_1 można sprowadzić do macierzy w postaci Jordana o 1 klatce rozmiaru 3×3 odpowiadającej wartości własnej 1 oraz klatce 1×1 odpowiadającej wartości własnej 2.
  - Dla $s \neq 1, 2$ macierz X_s można sprowadzić do macierzy w postaci Jordana o 1 klatce rozmiaru 2×2 odpowiadającej wartości własnej 1 oraz po jednej klatce 1×1 odpowiadającej wartościom własnym 2 oraz s.

Przechodzimy do (b). Dla $s = 1$ endomorfizm ϕ ma wartości własne $1, 2$ i zgodnie z rachunkami wyżej wiemy, że ϕ ma w pewnej bazie $\mathcal{J} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ macierz:

$$M(\phi)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Widzimy, że $(0, 1, 0, 0)$ jest wektorem własnym ϕ o wartości własnej 1 i możemy przyjąć $\beta_1 = (0, 1, 0, 0)$. Aby wyznaczyć β_2 rozwiązujemy układ:

$$(X_1 - I) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Mamy zatem $\beta_2 = (0, 0, -1, 0)$. Dalej rozwiązujemy równanie $(X_1 - I)\beta_3 = \beta_2$, uzyskując na przykład $\beta_3 = (1, 0, 0, 0)$. Następnie znajdujemy wektor własny o wartości własnej 2, na przykład $\beta_4 = (0, 1, 0, 1)$.

Zadanie 3. [18 pt] Niech $\pi \subset \mathbb{R}^4$ będzie płaszczyzną opisaną układem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_4 &= 5. \end{cases}$$

a) Wyznaczyć bazę punktową płaszczyzny π.

b) Podać przykład takiej płaszczyzny π' przechodzącej przez punkt $(0,1,0,1)$, że $\operatorname{af}(\pi \cup \pi') = \mathbb{R}^4$, poprzez wskazanie parametryzacji płaszczyzny π'.

Rozwiązanie. Zauważmy, że punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,0,0,1)$ jest rozwiązaniem układu opisującego π, a zatem należy do π. Przestrzeń styczna do π opisana jest układem jednorodnym:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzamy, że

$$T(\pi) = \operatorname{lin}\left((0,1,1,0), (-1,2,0,4)\right).$$

A zatem punkty $(1,0,0,1)+(0,1,1,0) = (1,1,1,1)$ oraz $(1,0,0,1)+(-1,2,0,4) = (0,2,0,5)$ należą do π, zaś układ

$$(1,0,0,1), (1,1,1,1), (0,2,0,5)$$

jest afinicznie niezależny i rozpina π, czyli jest poszukiwaną bazą punktową.

Przechodzimy do (b). Punkt $(0,1,0,1)$ oczywiście nie należy do π. Szukamy punktu p_4 takiego, by układ

$$p_0 = (1,0,0,1), \quad p_1 = (1,1,1,1), \quad p_2 = (0,2,0,5), \quad p_3 = (0,1,0,1), \quad p_4$$

był bazą punktową $\mathbb{R}^4$. Wtedy rozwiązaniem będzie np. płaszczyzna $\pi' = \operatorname{af}(p_0, p_3, p_4)$. W istocie problem sprowadza się teraz do dopełnienia układu:

$$\overrightarrow{p_0p_1} = (0,1,1,0), \quad \overrightarrow{p_0p_2} = (-1,2,0,4), \quad \overrightarrow{p_0p_3} = (-1,1,0,0)$$

do bazy przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dowolnym wektorem $\overrightarrow{p_0p_4}$. Łatwo widać, że można to zrobić na przykład za pomocą wektora $(0,0,1,0)$. A zatem układ bazowy znalezionej przez nas płaszczyzny to

$$(1,0,0,1); (-1,1,0,0), (0,0,1,0)$$

i możemy napisać jej parametryzację:

$$(s,t) \mapsto (1,0,0,1) + s(-1,1,0,0) + t(0,0,1,0), \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4. [10 pt] Niech H będzie niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej V nad K. Wykazać, że następujące warunki są równoważne.

(a) H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne.

(b) H jest warstwą podprzestrzeni V.

Rozwiązanie. Dowodzimy (i) $\Rightarrow$ (ii). Załóżmy, że H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne. Wybieramy $p_0 \in H$. Niech $W = \{\overrightarrow{p_0p} \mid p \in H\}$. Wykażemy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V. Weźmy dowolne $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, czyli pewne $\overrightarrow{p_0p_1}$, $\overrightarrow{p_0p_2}$, dla pewnych $p_1, p_2 \in H$. Weźmy też dowolne $a_1, a_2 \in K$. Niech $a_0 = 1 - a_1 - a_2$. Zbiór H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne, więc

$$p = a_0p_0 + a_1p_1 + a_2p_2 \in H.$$

Stąd wektor $\overrightarrow{p_0p}$ należy do W. Ale $\overrightarrow{p_0p} = a_1\overrightarrow{p_0p_1} + a_2\overrightarrow{p_0p_2} = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$. Stąd $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \in W$, co wobec dowolności $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ dowodzi, że W jest podprzestrzenią przestrzeni V. Ponadto $H = p_0 + W$ na mocy definicji W. Zatem H jest warstwą podprzestrzeni W w V.

Dowodzimy (ii) $\Rightarrow$ (i). Załóżmy, że $H = q + W$, dla pewnego $q \in V$ oraz pewnej podprzestrzeni W przestrzeni V. Niech $p_0, \ldots, p_k \in H$ oraz $a_0, \ldots, a_k \in K$, przy czym $a_0 + \ldots + a_k = 1$. Wówczas $p_i = q + \alpha_i$, dla pewnych $\alpha_i \in W$, gdzie $i = 0, \ldots, k$. Zatem

$$\sum_{i=0}^{k} a_ip_i = \sum_{i=0}^{k} a_i(q + \alpha_i) = \sum_{i=0}^{k} a_iq + \sum_{i=0}^{k} a_i\alpha_i = q + \gamma,$$

gdzie $\gamma = a_0\alpha_0 + \ldots + a_k\alpha_k$ jest kombinacją liniową wektorów przestrzeni W, więc należy do W. Stąd $a_0p_0 + \ldots + a_kp_k = q + \gamma \in q + W = H$. Zatem H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne.

Zadanie 5. [18 pt] Endomorfizmy ϕ, ψ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej $V \neq 0$ nad ciałem liczb zespolonych spełniają warunek $\phi^2 = \mathrm{id}_V = \psi^2$.

a) Pokazać, że jeśli dla pewnego niezerowego wektora $v \in V$ oraz pewnych $a, b \in \mathbb{C}$ spełniona jest równość:

$$v = a \cdot \phi(v) + b \cdot \psi(v),$$

to b jest wartością własną endomorfizmu $\psi - (a \cdot \psi \circ \phi)$ przestrzeni V.

b) Pokazać, że istnieje taka niezerowa liczba $a \in \mathbb{C}$, że endomorfizm $\psi - (a \cdot \psi \circ \phi)$ przestrzeni V ma niezerową wartość własną.

c) Pokazać, że istnieje podprzestrzeń $U \subseteq V$ wymiaru 1 lub 2, która jest zarówno ϕ-niezmiennicza, jak i ψ-niezmiennicza. W rozwiązaniu można korzystać z tezy punktu (b).

Rozwiązanie. Skoro $v = a \cdot \phi(v) + b \cdot \psi(v)$, to $\psi(v) = a \cdot (\psi \circ \phi)(v) + b \cdot \psi(v)^2 = a \cdot (\psi \circ \phi)(v) + b \cdot v$. A zatem $\psi(v) - a \cdot (\psi \circ \phi)(v) = b \cdot v$. Skoro $v \neq 0$, to v jest wektorem własnym $\psi - (a \cdot \psi \circ \phi)$ o wartości własnej b.

Dowodzimy (b). Z uwagi na to, że rozważamy endomorfizmy przestrzeni zespolonej wiadomo, że dla każdego $a \in \mathbb{C}$ endomorfizm $\psi - a \cdot \psi \circ \phi$ ma wektor własny. Gdyby nie istniało takie $a \neq 0$, że $\psi - a \cdot \psi \circ \phi$ ma niezerową wartość własną to by znaczyło, że każdy taki endomorfizm ma wartość własną równą 0. Innymi słowy dla dowolnego $a \neq 0$ istniałby niezerowy wektor v taki, że

$$(\psi - a\psi \circ \phi)(v) = 0 \Longrightarrow \psi(v) = a\psi(\phi(v)).$$

Obkładając równość wyżej endomorfizmem ψ oraz korzystając dwukrotnie z warunku $\psi^2 = \mathrm{id}$ dostajemy

$$\psi^2(v) = v = a\phi(v).$$

A zatem dla $a \neq 0$ wektor v jest wektorem własnym ϕ o wartości własnej a^{-1}. Tymczasem skoro $\phi^2 = \mathrm{id}$, to wartościami własnymi ϕ mogą być jedynie 1 lub -1, bowiem jeśli dla pewnego niezerowego wektora $w \in V$ mamy $\phi(w) = \lambda \cdot w$, to z warunku $\phi^2 = \mathrm{id}$ mamy:

$$w = \phi^2(w) = \phi(\phi(w)) = \phi(\lambda \cdot w) = \lambda^2 w \Rightarrow (\lambda^2 - 1)w = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \quad (\text{skoro } w \neq 0).$$

A zatem dla dowolnego $a \notin \{-1, 1\}$ endomorfizm $\psi - a \cdot \phi \circ \psi$ ma niezerową wartość własną (dla $a = 0$ też).

Dowodzimy (c). Niech v będzie wektorem własnym endomorfizmu $\psi - a \cdot \phi \circ \psi$ odpowiadającym niezerowej wartości własnej b. Wówczas $\psi(v) = a\psi(\phi(v)) + bv$. A zatem obkładając powyższą równość przez ψ mamy $v = a\phi(v) + b\psi(v)$. Niech $U = \mathrm{lin}(v, \phi(v))$. Mamy $\phi^2(v) = v$, więc U jest podprzestrzenią cykliczną wymiaru $\leqslant 2$ (a skoro $v \neq 0$, to $\dim U \geqslant 1$). Jednocześnie skoro $a, b \neq 0$, to powyższa równość implikuje $U = \mathrm{lin}(v, \psi(v))$. A zatem U jest jednocześnie ϕ-niezmiennicza i ψ-niezmiennicza.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6×3 pt]:

1. Czy podzbiór $X = \{A \in \mathrm{M}_n(K) : \mathrm{tr}(A) = 1\}$ jest podprzestrzenią afiniczną w $\mathrm{M}_n(K)$?

Odpowiedź: Tak. Zbiór macierzy $Y = \{A \in \mathrm{M}_n(K) : \mathrm{tr}(A) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową $\mathrm{M}_n(K)$, zaś biorąc macierz E_{11}, która ma jedyny niezerowy wyraz równy 1 w pierwszym wierszu i kolumnie mamy $X = E_{11} + Y$, czyli X jest warstwą podprzestrzeni liniowej w $\mathrm{M}_n(K)$.

Uwaga. Niekoniecznie $X = \frac{1}{n}I + Y$, bo $\mathrm{tr}(I)$ bywa zerem. A dla $K = \mathbb{Z}_p$, gdzie $p \mid n$, napis $\frac{1}{n}$ nie ma sensu.

2. Wielomian charakterystyczny endomorfizmu ϕ równy jest $(1 - \lambda)^{10}$, przy czym $\dim\ker(\phi - \mathrm{id}) = 5$, $\dim\ker(\phi - \mathrm{id})^2 = 8$ oraz $\dim\ker(\phi - \mathrm{id})^3 = 9$. Podać macierz endomorfizmu ϕ w bazie Jordana.

Odpowiedź: Jedyną wartością własną endomorfizmu ϕ jest 1. Krotność algebraiczna tej wartości własnej to 10, a więc jest to także suma rozmiarów klatek Jordana odpowiadających tej wartości własnej. Wiedząc, że dla dowolnego $\psi \in \mathrm{End}(V)$ mamy $\dim V = \dim\mathrm{im}\,\psi + \dim\ker\psi$, dostajemy: $r(\phi - \mathrm{id})^0 = 10$ oraz

$$r(\phi - \mathrm{id}) = 5, \quad r(\phi - \mathrm{id})^2 = 2, \quad r(\phi - \mathrm{id})^3 = 1.$$

Stąd w macierzy endomorfizmu ϕ w postaci Jordana mamy:

- $5 = q_1 = 10 - 5$ klatek Jordana rozmiaru nie mniejszego niż 1,
- $3 = q_2 = 5 - 2$ klatek Jordana rozmiaru nie mniejszego niż 2,
- $1 = q_3 = 2 - 1$ klatek Jordana rozmiaru nie mniejszego niż 3.

A zatem mamy 2 klatki rozmiaru 1×1, 2 klatki rozmiaru 2×2 oraz jedną klatkę rozmiaru 4×4 – wszystkie odpowiadające wartości własnej 1.

3. Czy macierz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna nad ciałem $\mathbb{Z}_3$?

Odpowiedź: Nie. Sposób 1. Wielomian charakterystyczny tej macierzy to:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - \lambda + 2.$$

Wielomian ten nie ma pierwiastków w $\mathbb{Z}_3$ (aby to sprawdzić, podstawiamy $\lambda = 0, 1, 2$), a zatem macierz ta nie ma wartości własnych w $\mathbb{Z}_3$. Nie istnieje więc baza $\mathbb{Z}_3^2$ złożona z wektorów własnej tej macierzy.

Sposób 1'. Możliwe wartości własne to $0, 1, 2$. Odejmujemy od wyjściowej macierzy kolejno macierze $0, I, 2I$ i sprawdzamy, że wszystkie mają rzędy 2. A zatem wyjściowa macierz nie ma wartości własnych.

4. Macierz rzeczywista A rozmiarów 2×2 ma wartości własne 1 i 2. Wyznaczyć $\det(A^3 - 3A^2 + A + 5I)$.

Odpowiedź: 12. Pokażemy dwa sposoby rozwiązania tego zadania.

Sposób 1. Traktujemy A jako macierz endomorfizmu ϕ przestrzeni dwuwymiarowej w bazie standardowej. Wówczas wartość $\det(\phi^3 - 3\phi^2 + \phi + 5\,\mathrm{id})$ nie zależy od wyboru macierzy przekształcenia ϕ. W szczególności, skoro endomorfizm ϕ ma dwie różne wartości własne, to jest on diagonalizowalny i ma w pewnej bazie macierz $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. A zatem

$$\det(A^3 - 3A^2 + A + 5I) = \det(J^3 - 3J^2 + J + 5I) = \begin{vmatrix} 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 5 & 0 \\ 0 & 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 5 \end{vmatrix} = 12.$$

Sposób 2. Zauważmy, że macierz A musi mieć wielomian charakterystyczny postaci:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Z twierdzenia Cayleya-Hamiltona wynika, że $A^2 - 3A + 2I = 0$. Tymczasem:

$$(A^2 - 3A + 2I)A = A^3 - 3A^2 + 2A \Rightarrow A^3 - 3A^2 + 2A = 0.$$

Stąd

$$\det(A^3 - 3A^2 + A + 5I) = \det(-A + 5I).$$

Wartościami własnymi $-A + 5I$ są $-1 + 5 = 4$ oraz $-2 + 5 = 3$. Natomiast $\det(-A + 5I)$ to iloczyn wartości własnych macierzy $-A + 5I$, czyli 12.

5. Niech $n > 1$ oraz niech $\Phi \in \mathrm{End}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ będzie dany wzorem $\Phi(M) = M^T$, dla każdej macierzy $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Znaleźć wartości własne tego endomorfizmu.

Odpowiedź: -1 oraz 1. Zauważmy, że $\Phi^2(M) = M$, a zatem $\Phi^2 = \mathrm{id}$. Jeśli λ jest wartością własną Φ. zaś M – wektorem własnym o wartości własnej λ, to:

$$M = \Phi^2(M) = \lambda \cdot \Phi(M) = \lambda^2 \cdot M \Rightarrow (\lambda^2 - 1)M = 0.$$

Skoro M jest macierzą niezerową, to λ może mieć jedynie wartość -1 oraz 1. Oczywiście obydwie te wartości własne są przyjmowane. o ile $n > 1$. Wektorem własnym o wartości własnej 1 jest dowolna niezerowa macierz symetryczna, np. I, zaś wektorem własnym o wartości własnej -1 jest dowolna macierz antysymetryczna, czyli dla $n > 1$ na przykład macierz mająca w pierwszym wierszu i n-tej kolumnie wyraz -1, w n-tym wierszu i pierwszej kolumnie wyraz 1, zaś pozostałe wyrazy są zerowe.

6. Wyznaczyć współrzędne barycentryczne punktu $P = (4, 2)$ względem bazy punktowej $(1, 0), (6, 5), (6, -5)$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^2$.

Odpowiedź: Szukane współrzędne to $\frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}$. Niech $A = (1, 0), B = (6, 5), C = (6, -5)$. Rozważamy wektory $\overrightarrow{AB} = (5, 5), \overrightarrow{AC} = (5, -5), \overrightarrow{AP} = (3, 2)$. Wyznaczamy $x, y \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}.$$

Szukane współrzędne barycentryczne to wówczas: $1 - x - y, x, y$.