GAL II Kolokwium 1, 31 marca 2022

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1. [18pt] Dla każdego $t \in \mathbb{C}$ określamy macierz

$$A_t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}).$$

a) Dla jakich wartości parametru t macierz A_t jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$?

b) Niech $B = A_1$. Wyznaczyć B^{100}.

Zadanie 2. [18 pt] Dla każdego $s \in \mathbb{R}$ określamy macierz:

$$X_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R}).$$

a) Wyznaczyć macierz w postaci Jordana podobną do macierzy X_s, w zależności od parametru s.

b) Znaleźć bazę Jordana endomorfizmu $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ zadanego warunkiem $\mathrm{M}(\phi)_{st}^{st} = X_1$.

Zadanie 3. [18 pt] Niech $\pi \subset \mathbb{R}^4$ będzie płaszczyzną opisaną układem:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = 2 \\ 4x_1 + x_4 & = 5. \end{cases}$$

a) Wyznaczyć bazę punktową płaszczyzny π.

b) Podać przykład takiej płaszczyzny π' przechodzącej przez punkt $(0, 1, 0, 1)$, że $\mathrm{af}(\pi \cup \pi') = \mathbb{R}^4$, poprzez wskazanie parametryzacji płaszczyzny π'.

Zadanie 4. [10 pt] Niech H będzie niepustym podzbiorem przestrzeni liniowej V nad K. Wykazać, że następujące warunki są równoważne.

(a) H jest zamknięty ze względu na kombinacje afiniczne.

(b) H jest warstwą podprzestrzeni V.

Zadanie 5. [18 pt] Endomorfizmy ϕ, ψ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej $V \neq 0$ nad ciałem liczb zespolonych spełniają warunek $\phi^2 = \mathrm{id}_V = \psi^2$.

a) Pokazać, że jeśli dla pewnego niezerowego wektora $v \in V$ oraz pewnych $a, b \in \mathbb{C}$ spełniona jest równość:

$$v = a \cdot \phi(v) + b \cdot \psi(v),$$

to b jest wartością własną endomorfizmu $\psi - (a \cdot \psi \circ \phi)$ przestrzeni V.

b) Pokazać, że istnieje taka niezerowa liczba $a \in \mathbb{C}$, że endomorfizm $\psi - (a \cdot \psi \circ \phi)$ przestrzeni V ma niezerową wartość własną.

c) Pokazać, że istnieje podprzestrzeń $U \subseteq V$ wymiaru 1 lub 2, która jest zarówno ϕ-niezmiennicza, jak i ψ-niezmiennicza. W rozwiązaniu można korzystać z tezy punktu (b).

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL II Kolokwium 1, 31 marca 2022

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania [6 × 3 pt]:

1. Czy podzbiór $X = \{A \in \mathrm{M}_n(K) : \mathrm{tr}(A) = 1\}$ jest podprzestrzenią afiniczną w $\mathrm{M}_n(K)$?

2. Wielomian charakterystyczny endomorfizmu ϕ równy jest $(1-\lambda)^{10}$, przy czym $\dim\ker(\phi - \mathrm{id}) = 5$, $\dim\ker(\phi - \mathrm{id})^2 = 8$ oraz $\dim\ker(\phi - \mathrm{id})^3 = 9$. Podać macierz endomorfizmu ϕ w bazie Jordana.

3. Czy macierz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna nad ciałem $\mathbb{Z}_3$?

4. Macierz rzeczywista A rozmiarów 2×2 ma wartości własne 1 i 2. Wyznaczyć $\det(A^3 - 3A^2 + A + 5I)$.

5. Niech $n > 1$ oraz niech $\Phi \in \mathrm{End}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ będzie dany wzorem $\Phi(M) = M^T$, dla każdej macierzy $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Znaleźć wartości własne tego endomorfizmu.

6. Wyznaczyć współrzędne barycentryczne punktu $P = (4, 2)$ względem bazy punktowej $(1, 0), (6, 5), (6, -5)$ przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^2$.