GAL II Egzamin, 20 czerwca 2022

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego i numer zadania.

Zadanie 1. [40 pt] Endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dany jest następującym wzorem

$$\phi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (3x_1, x_1 + 3x_2 - x_4, -3x_1 + 3x_3 + 3x_4, 2x_1 + x_2 + x_4).$$

a) Znaleźć wartości własne endomorfizmu ϕ oraz bazy odpowiadających im podprzestrzeni własnych.

b) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = B_s$, gdzie

$$B_s = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & s \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})?$$

Zadanie 2. [40 pt] W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\, , \rangle$ dana jest

- płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 - x_3 = 1\}$,
- prosta $L = (0, -1, 0) + lin(1, 0, 1) \subset M$.

a) Znaleźć rzut prostopadły prostej $K = (1, 0, 3) + lin((-2, 1, 3))$ na płaszczyznę M.

b) Ile jest zachowujących orientację izometrii ϕ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \langle\, , \rangle)$ takich, że dla każdego $p \in L$ zachodzi $\phi(p) = p$ oraz dla każdego $q \in M$ zachodzi $\phi(q) \in M$? Każdą taką izometrię opisać, podając jej wartości na dowolnie wybranej bazie punktowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 3. [45 pt] Niech $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem dwuliniowym danym wzorem:

$$h((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = -x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_4 + x_4y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - 2x_3y_3 + x_4y_4.$$

a) Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$.

b) Jaki jest największy możliwy wymiar nieosobliwej podprzestrzeni $(\mathbb{R}^4, h)$? Jaki jest największy możliwy wymiar podprzestrzeni V przestrzeni $(\mathbb{R}^4, h)$, że $h|_{V \times V} = 0$?

c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, istnieje baza $\mathcal{A}$ taka, że

$$G(h; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}?$$

Zadanie 4. [45 pt] Forma kwadratowa $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem:

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

(a) Znaleźć postać diagonalną formy kwadratowej q i podać bazę $\mathbb{R}^3$, w której q ma otrzymaną postać diagonalną.

(b) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_3 - 4 = 0\}.$$

(c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnie X oraz $Y_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (1-t)x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 = t\}$ są afinicznie równoważne?

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL II Egzamin, 20 czerwca 2022

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań.

Zadanie 5. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące sześć pytań [6×5 pt]:

1. Niech $A \in M_n(\mathbb{R})$ będzie macierzą o niepustym zbiorze rzeczywistych wartości własnych. Czy macierz $A + I$ może mieć ten sam zbiór rzeczywistych wartości własnych co A?

2. Endomorfizm ϕ skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K spełnia warunek $\phi^4 = \phi^3$. Pokazać, że macierz ϕ w bazie Jordana zawiera tylko klatki rozmiaru mniejszego lub równego od 3.

3. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ dana jest podprzestrzeń afiniczna H wymiaru $n-1$ oraz krzywa C złożona z punktów $(t, t^2, \ldots, t^n)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Pokazać, że krzywa C przecina podprzestrzeń H w co najwyżej n punktach.

UWAGA! Pytania 4-6 znajdują się na drugiej stronie kartki.

4. Niech V będzie przestrzenią euklidesową oraz niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami V spełniającymi warunek $\dim W_1 < \dim W_2$. Pokazać, że istnieje niezerowy wektor $v \in W_2$ taki, że $v \in W_1^{\perp}$.

5. Macierze ortogonalne $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ spełniają warunek $P + Q = I$, gdzie I jest macierzą identycznościową. Czy $P - Q$ jest macierzą ortogonalną?

6. Czy dla każdej macierzy symetrycznej $A \in M_n(\mathbb{R})$ o wyrazach nieujemnych i dodatnim wyznaczniku forma kwadratowa wyznaczona przez A jest dodatnio określona?