GAL II Kolokwium 2, 5 czerwca 2021, **losowy temat**

Zadanie 1. [15 pt] Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi \in End(\mathbb{R}^3)$ którego macierz w bazie standardowej jest równa

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Pokaż, że endomorfizm jest diagonalizowalny i znajdź bazę $\mathbb{R}^3$ składającą się z wektorów własnych φ.

(b) Zdefiniuj iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^3$ tak, że φ jest endomorfizmem samosprzężonym względem tego iloczynu skalarnego; podaj macierz tego iloczynu w bazie standardowej.

Zadanie 2. [15 pt] W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^4$ dane są:

- punkt $p = (11, 9, 9, 4)$,
- prosta $L = af((3, 2, 1, 0),\ (4, 3, 2, 1))$,
- płaszczyzna $M = af((1, 0, 0, 0),\ (1, 1, 1, 1),\ (1, 0, -2, 1))$.

(a) Niech H będzie 3-wymiarową podprzestrzenią afiniczną w $\mathbb{R}^4$ zawierającą p i M. Znaleźć równanie liniowe (lub układ równań liniowych) opisujące H.

(b) Znaleźć parametryzację prostej przechodzącej przez punkt p i przecinającej L i M.

Zadanie 3. [15 pt] Rozpatrzmy izometrię $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ taką, że $f(1, 0, 0) = (1, 1, -1)$, $f(2, 1, 0) = (2, 2, -1)$, $f(2, -1, 0) = (0, 2, -1)$ i $f(1, 0, 1) = (1, 1, -2)$. Niech φ oznacza pochodną przekształcenia f.

(a) Pokaż, że przekształcenie liniowe φ jest diagonalizowalne, znajdź bazę ortonormalną $\mathbb{R}^3$ składająca się z wektorów własnych tego przekształcenia.

(b) Wypisz macierz przekształcenia φ w bazie standardowej $\mathbb{R}^3$. Wypisz przekształcenie f za pomocą wzoru $f(x_1, x_2, x_2) = (L_1(x_1, x_2, x_3), L_2(x_1, x_2, x_3), L_3(x_1, x_2, x_3))$ gdzie $L_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + b_i$ oraz $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

(c) Załóżmy, że $f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ jest izometrią taką, że $f_1(1, 0, 0) = (1, 1, -1)$ i $f_1(2, 1, 0) = (2, 2, -1)$ oraz wielomian charakterystyczny pochodnej f_1 jest równy $-x^3 - x^2 + x + 1$. Pokaż, że $f_1 = f$.

Zadanie 4. [15 pt] Rozpatrzmy afiniczną przestrzeń euklidesową $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Rozpatrzmy płaszczyznę $\Lambda \subset \mathbb{R}^4$ zadaną równaniami

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Znajdź bazę ortonormalną przestrzeni stycznej $T(\Lambda)$ oraz jej uzupełnienia ortogonalnego $T(\Lambda)^\perp$ w $\mathbb{R}^4$.

(b) Znajdź odbicie prostopadłe (czyli symetrię prostopadłą) punktu $p = (-1, 1, 0, 0)$ względem Λ.

(c) znajdź odległość punktu $q = (1, 0, 0, 1)$ od Λ.

Zadanie 5. Odpowiedz z uzasadnieniem na następujące pytania [4×5 pt]:

1. Niech H będzie przestrzenią afiniczną skończonego wymiaru nad ustalonym ciałem K. Załóżmy, że $f_1, f_2 : H \to H$ są przekształceniami afinicznymi takimi, że złożenie ich pochodnych jest identycznością na przestrzeni stycznej $T(H)$. Czy przekształcenia f_1, f_2 są automorfizmami H i posiadają afiniczne przekształcenia odwrotne? Czy przekształcenie f_2 jest przekształceniem odwrotnym do f_1?

2. Niech H będzie afiniczną przestrzenią euklidesową wymiaru n z ustaloną orientacją. Załóżmy, że $M \subset H$ jest podprzestrzenią afiniczną wymiaru d. Przez $r_M : H \to H$ oznaczmy symetrię prostopadłą (odbicie prostopadłe) H względem M. Rozstrzygnij kiedy, w zależności od liczb n i d, symetria r_M zachowuje orientację H.

3. Rozpatrzmy następującą macierz o współczynnikach rzeczywistych

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz A jest ortogonalna? Czy istnieje macierz ortogonalna B taka, że produkt $B^{-1} \cdot A \cdot B$ jest macierzą diagonalną?

4. W przestrzeni afinicznej $H = \mathbb{R}^5$ rozpatrzmy płaszczyzny

$$M_1 = af((-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2)\,,(-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2)\,,(-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3)),$$
$$M_2 = af((-1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2)\,,(-1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2)\,,(-1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2)).$$

Rozstrzygnij czy istnieje podprzestrzeń przestrzeni H wymiaru 4, która zawiera M_1 i M_2. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. [20 pt] Na przestrzeni afinicznej $H = \mathbb{R}^4$ bierzemy standardową strukturę afinicznej przestrzeni euklidesowej. W przestrzeni H bierzemy punkt $q = (1, 1, 1, 1)$ i prostą L_λ zadaną parametrycznie $t \to (1, 0, 0, 0) + t \cdot (1, \lambda, \lambda, 1)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ jest pewnym parametrem. Płaszczyzna Π jest zadana w H przez układ równań

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

(a) Znajdź rzut prostopadły punktu q na płaszczyznę Π i odległość punktu q od płaszczyzny Π.

(b) Ustal dla jakiego parametru λ odległość punktu q od prostej L_λ jest najmniejsza.

(c) Znajdź formułę na odległość punktu q od prostej L_λ w zależności od parametru λ.