GAL II Kolokwium 1, 17 kwietnia 2021, **losowy temat**

Zadanie 1. [15 pt] Rozpatrzmy następującą macierz o współczynnikach z $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiadomo, że wielomian charakterystyczny macierzy A jest równy $w_A(x) = (x+1)^4$.
Niech $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^4)$ będzie endomorfizmem zadanym przez A.

(a) Pokaż, że $\dim \ker(\varphi + id_{\mathbb{Q}^4}) = 2$ oraz $(\varphi + id_{\mathbb{Q}^4})^2 = 0$.

(b) Napisz macierz podobną do A, która jest w postaci Jordana; odpowiedź uzasadnij.

(c) Znajdź bazę Jordana dla φ, która zawiera wektory $(-1,0,0,1)$ i $(0,1,1,0)$.

Zadanie 2. [15 pt] Rozpatrzmy macierz $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ zależną od parametru $t \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & t-1 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

Niech $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ będzie endomorfizmem zadanym w bazie standardowej macierzą A.

(a) Znajdź wartości własne φ; uwaga: nie musisz liczyć wielomianu charakterystycznego.

(b) Znajdź wektory własne φ, wypisz bazę Jordana.

(c) Policz macierz A^8, skorzystaj przy tym z poprzednich części zadania.

Zadanie 3. [15 pt] Rozstrzygnij dla jakich parametrów $s, t \in \mathbb{R}$ poniższe dwie macierze o współczynnikach rzeczywistych są podobne

$$A = \begin{bmatrix} s+t & 0 & s \\ 0 & t & 0 \\ -s & -1 & -s+t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} s+t & 0 & s \\ 0 & t & 0 \\ -s & 0 & -s+t \end{bmatrix}$$

Zadanie 4. [15 pt] Policz, w zależności od parametrów $t,\ s \in \mathbb{R}$, rząd i sygnaturę dwuliniowej rzeczywistej formy symetrycznej zadanej poniższą macierzą :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & -1 & s & s^2+1 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5. Odpowiedz z uzasadnieniem na następujące pytania [4×5 pt]:

1. Niech $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{Q}^6)$ będzie endomorfizmem, takim że $w_\varphi = x^6$. Znajdź wymiar $\ker \varphi^2$ o ile wiadomo, że $\dim \ker \varphi = 3$, $\varphi^2 \neq 0$ i $\varphi^3 = 0$.

2. Podaj przykład macierzy $A \in M_{6\times 6}(\mathbb{Q})$, której wielomian charakterystyczny jest równy

$$w_A = x^4 \cdot (x+3) \cdot (x+7)$$

i która ma rząd 3. Czy każda macierz spełniająca powyższe warunki jest podobna do podanej macierzy?

3. Załóżmy, że rzeczywista dwuliniowa forma symetryczna $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest zadana w bazie standardowej za pomocą macierzy symetrycznej A takiej, że $\det A = -7$. Załóżmy dodatkowo, że istnieje wektor $v \in \mathbb{R}^3$ spełniający warunek $h(v,v) = 5$. Znajdź macierz diagonalną, która jest kongruentna z A nad $\mathbb{R}$.

4. Załóżmy, że $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest niezerową dwuliniową formą symetryczną, która jest osobliwa i ma sygnaturę zero. Pokaż, że istnieje wektor $v \in \mathbb{R}^3$ taki, że $h(v,v) = 0$ oraz $lin(v)^\perp \neq \mathbb{R}^3$.

Zadanie 6. [20 pt] Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K. Mówimy, że endomorfizm $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ jest regularny, jeśli dla każdej φ-niezmienniczej podprzestrzeni U w V istnieje φ-niezmiennicza podprzestrzeń Z w V, że $V = U \oplus Z$.

(a) Pokaż, że jeśli endomorfizm $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ jest regularny, to dla każdej φ-niezmienniczej podprzestrzeni W w V endomorfizm $\varphi_{|W} \in \mathrm{End}(W)$ też jest regularny.

(b) Pokaż, że nad ciałem algebraicznie domkniętym, jeśli endomorfizm jest regularny, to jest diagonalizowalny.