Drugie kolokwium z GALu II, 28 maja 2020 r.

Zadanie 1. *Które z poniższych czterech macierzy są kongruentne nad $\mathbb{R}$?*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 2. *Niech h będzie formą dwuliniową na przestrzeni liniowej $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zadaną wzorem $h(A,B) = 2\cdot \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(A)\cdot \mathrm{tr}(B)$, dla każdych $A,B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Wykazać, że forma h jest osobliwa. Pokazać, że istnieje podprzestrzeń $W \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ wymiaru 3 taka, że forma $h|_{W\times W}$ jest nieosobliwa.*

Zadanie 3. *Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ rozważmy formę kwadratową $q_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taką, że:*

$$q_t(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + tx_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

W zależności od parametru t znaleźć rząd i sygnaturę formy q_t. Dla jakich wartości parametru t forma q_t jest nieokreślona? Niech $t = 1$. Znaleźć bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taką, że macierz $G(q_1,\mathcal{A})$ jest diagonalna.

Zadanie 4. *Pokazać, że macierze* $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *oraz* $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *są kongruentne nad $\mathbb{R}$ i znaleźć macierz odwracalną $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ taką, że $A_2 = C^T A_1 C$.*

Zadanie 5. *Dana jest przestrzeń dwuliniowa $(\mathbb{R}^4, h)$, gdzie $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dana jest w bazie standardowej macierzą:*

$$G(h;st) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć bazę prostopadłą $\mathcal{A} = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ przestrzeni $(\mathbb{R}^4,h)$ taką, że $h(\alpha_i,\alpha_i) \in \{1,-1\}$, dla $i = 1,2,3,4$. Znaleźć bazę przestrzeni $(\mathbb{R}^4,h)$ złożoną z wektorów izotropowych.

Zadanie 6. *Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru n nad K, zaś V^* przestrzenią sprzężoną do V. Na przestrzeni liniowej $W = \{(v,f), v \in V, f \in V^*\}$ (z operacjami $(v_1,f_1) + (v_2,f_2) = (v_1+v_2, f_1+f_2)$ oraz $a(v,f) = (av, af)$, dla dowolnych $v_1,v_2,v \in V, f_1,f_2,f \in V^*, a \in K$) rozważamy symetryczną formę dwuliniową $h : W\times W \to K$ postaci $h((v,f),(w,g)) = f(w) + g(v)$. Wykazać, że forma h jest nieosobliwa oraz, że W można przedstawić w postaci sumy prostej dwóch podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanych.*

Zadanie 7. *W $\mathbb{R}^3$ dane są: płaszczyzna $H : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$, prosta $L = (-2,4,-3) + \mathrm{lin}(0,1,-2)$ oraz punkt $p = (1,1,0)$. Niech M będzie taką prostą, która przechodzi przez punkt p, przecina prostą L i nie przecina płaszczyzny H. Znaleźć punkt $L \cap M$.*

Zadanie 8. *Niech K będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 oraz niech p,q,r,s będą niewspółliniowymi elementami przestrzeni afinicznej H nad K. Pokazać, że następujące trzy warunki są równoważne:*
(1) $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$,
(2) $\mathrm{af}(p,r) \cap \mathrm{af}(q,s) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s$,
(3) istnieją punkty $a,b,c,d \in H$ takie, że p,s,r,q są odpowiednio środkami odcinków ab, bc, cd, da.

Zadanie 9. *Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0,1,0) + \mathrm{lin}((2,1,2))$. Znaleźć obraz $s(p)$ punktu $p = (1,0,1)$ przy symetrii s. Znaleźć bazę punktową obrazu $s(M)$ przestrzeni $M = \mathrm{af}(p,p_1,p_2)$, gdzie $p_1 = (1,2,2), p_2 = (1,6,4)$, przy symetrii s.*

Zadanie 10. *Znaleźć wzór na symetrię $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ względem prostej $K = (2,1,0) + \mathrm{lin}((1,-1,-1))$ wzdłuż płaszczyzny $H = (1,0,0) + \mathrm{lin}((1,1,-2),(0,1,-1))$*