Rozwiązania zadań z kolokwium próbnego z GAL II, 23 kwietnia 2020 r.

Zadanie 1. *Czy istnieje endomorfizm rzeczywistej przestrzeni liniowej posiadający wektory własne α, β, γ o wartościach własnych $2, 5, -7$, odpowiednio, spełniające: $\alpha + \beta + \gamma = 0$?*

Rozwiązanie. NIE. Podany warunek implikuje, że wektory α, β, γ tworzą układ liniowo zależny, co jest niemożliwe (wykład).

Dowód bezpośredni. Załóżmy przeciwnie, że V jest przestrzenią nad $\mathbb{R}$ oraz $\phi \in End(V)$ jest taki, że $\phi(\alpha) = 2\alpha$, $\phi(\beta) = 5\beta$, $\phi(\gamma) = -7\gamma$, dla pewnych niezerowych $\alpha, \beta, \gamma \in V$ spełniających $\alpha + \beta + \gamma = 0$. A zatem $0 = \phi(0) = \phi(\alpha + \beta + \gamma) = 2\alpha + 5\beta - 7\gamma$. Stąd $2\alpha = -2\beta - 2\gamma = -5\beta + 7\gamma$, czyli $\beta = 3\gamma$. To nie jest możliwe, bo wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne. ■

Zadanie 2. *Niech A oraz B będą macierzami rozmiaru $n \times n$. Wiadomo, że wektory $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi zarówno A, jak i B, i odpowiadają one kolejno wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Czy wynika stąd, że $A = B$?*

Rozwiązanie. TAK. Niech $\phi, \psi : K^n \to K^n$ będą endomorfizmami liniowymi takimi, że $A = M(\phi)_{st}^{st}$ oraz $B = M(\psi)_{st}^{st}$. Niech $(x_{1i}, \ldots, x_{ni})$ będzie wektorem współrzędnych α_i w bazie standardowej K^n. Układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tworzą liniowo niezależne wektory własne A oraz B, a zatem układ $\mathcal{X} = (x_{1i}, \ldots, x_{ni})_{i=1}^n$, stanowi bazę K^n złożoną z wektorów własnych A i B. W tej bazie endomorfizmy ϕ oraz ψ mają macierz diagonalną D o wyrazach na diagonali $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Skoro jednak $D = M(\phi)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}} = M(\psi)_{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$, to także $M(\phi)_{st}^{st} = M(\psi)_{st}^{st}$, czyli $A = B$. ■

Zadanie 3. *Niech ϕ będzie endomorfizmem 7-wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$. Przypuśćmy, że 3 jest wartością własną endomorfizmu ϕ, przy czym $\dim V_{(3)} = 6$ oraz przypuśćmy, że ϕ nie jest monomorfizmem. Czy wynika stąd, że endomorfizm ϕ jest diagonalizowalny?*

Rozwiązanie. TAK. Endomorfizm ϕ przestrzeni V jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy wymiar V równy jest sumie wymiarów podprzestrzeni własnych odpowiadających wartościom własnym ϕ. Mamy natomiast $\dim V_{(3)} = 6$ oraz wiemy, że $\ker(\phi) \neq 0$, a więc $\dim V_{(0)} \geqslant 1$. Z uwagi na to, że $V_{(3)} \cap V_{(0)} = \{0\}$ mamy

$$7 = \dim V \geqslant \dim(V_{(3)} + V_{(0)}) = \dim V_{(3)} + \dim V_{(0)} \geqslant 6 + 1 = 7.$$

A zatem $\dim(V) = \dim V_{(3)} + \dim V_{(0)}$, co oznacza, że ϕ jest diagonalizowalny. ■

Zadanie 4. *Pewna macierz $A \in M_{7\times7}(\mathbb{C})$ spełnia równanie $(A-I)^3 = 0$. Wiadomo też, że $r(A-I)^2 = 2$. Wykazać, że jedyną wartością własną macierzy A jest 1. Opisać postać Jordana macierzy A.*

Rozwiązanie. Niech $Av = \lambda v$, dla pewnego niezerowego wektora v oraz $\lambda \in \mathbb{C}$. Mamy zatem $(A - I)v = (\lambda - 1)v$, czyli $(A-I)^3 v = (\lambda-1)^3 v$. Ale $(A-I)^3 v = 0v = 0$, a zatem skoro $v \neq 0$ mamy $(\lambda - 1)^3 = 0$, czyli $\lambda = 1$. A zatem A można sprowadzić do postaci Jordana, w której wszystkie klatki odpowiadają wartości własnej 1. Wyznaczamy teraz stałe $q_k = r(A-I)^{k-1} - r(A-I)^k$ opisujące liczby klatek rozmiaru $\geqslant k$.

Skoro $(A - I)^3 = 0$, to $r(A - I)^3 = 0$. A zatem $q_3 = 2 - 0 = 2$. Oczywiście $q_4 = r(A - I)^3 - r(A - I)^4 = 0 - 0 = 0$. Zatem w postaci Jordana J macierzy A są dwie klatki rozmiaru nie mniejszego niż 3 i zero klatek rozmiaru nie mniejszego niż 4. A zatem J ma dwie klatki rozmiaru 3×3, i żadnej większej. Skoro A (a więc i J) jest rozmiarów 7×7, to suma rozmiarów klatek Jordana macierzy J to 7. Postać Jordana macierzy A ma zatem jedną klatkę 1×1 oraz dwie klatki 3×3, odpowiadające wartości własnej 1. ■

Zadanie 5. *Wyznaczyć bazę Jordana dla endomorfizmu $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ danego wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2, -x_1 - x_2 + x_3, x_1 - 2x_3)$ o wielomianie charakterystycznym $w_\phi(\lambda) = -(1 + \lambda)^3$.*

Rozwiązanie. Skoro wielomian charakterystyczny endomorfizmu ϕ rozkłada się na czynniki liniowe, to istnieje baza $\mathcal{J}$, w której macierz ϕ ma postać Jordana J. Wyznaczmy najpierw postać J, określając liczbę i rozmiary klatek Jordana tej macierzy . Wszystkie klatki odpowiadają wartości własnej -1. Niech $A = M(\phi)_{st}^{st}$. Do wyznaczenia liczby i rozmiarów tych klatek badamy rzędy potęg macierzy $A + I$, czyli:

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (A + I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

W szczególnosci $r(A+I)=2$ oraz $r(A+I)^2=1$, czyli $q_1=1$. A zatem J ma jedną klatkę Jordana rozmiaru 3×3 odpowiadającą wartości własnej -1. Niech $\mathcal{J}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ będzie szukaną bazą $\mathbb{R}^3$, czyli

$$M(\phi)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Mamy więc $\phi(\alpha_1)=-\alpha_1, \phi(\alpha_2)=\alpha_1-\alpha_2, \phi(\alpha_3)=\alpha_2-\alpha_3$. Innymi słowy α_1 jest wektorem o współrzędnych spełniających układ równań o macierzy $A+I$, a α_2 jest wektorem o współrzędnych spełniających układ równań o macierzy $(A+I)^2$. Możemy więc przyjąć $\alpha_1=(1,-1,1)$, $\alpha_2=(1,0,0)$ oraz $\alpha_3=(0,1,0)$. ■

Zadanie 6. *Niech $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Pokazać, że jeśli $A^3=A$, to $r(A)=\operatorname{tr}A^2$.*

Rozwiązanie. Niech J będzie macierzą w postaci Jordana podobną do A. Wiemy, że $r(A)=r(J)$ oraz $\operatorname{tr}A^2=\operatorname{tr}J^2$. Macierz J jest górnotrójkątna i na jej przekątnej stoją wartości własne macierzy A. Podobnie macierz J^2 jest górnotrójkątna i na jej przekątnej stoją kwadraty wartości własnych macierzy A, czyli wartości własne macierzy A^2. Twierdzimy, że wartości własne macierzy A wynosić mogą jedynie $-1,0,1$. Istotnie, jeśli $Av=\lambda v$, dla pewnego wektora niezerowego v, to $A^3v=\lambda^3 v$. A zatem równość $A^3=A$ pociąga za sobą równość $A^3v=Av$, czyli $(\lambda^3-\lambda)v=0$. Skoro $v\neq 0$, to $\lambda^3-\lambda=0$, a więc $\lambda\in\{-1,0,1\}$. A zatem elementy na przekątnej macierzy J to jedynie $-1,0$ lub 1. Stąd elementy na przekątnej J^2 mogą wynosić jedynie $0,1$. Reszta tezy wynika z faktu, że A jest diagonalizowalna. Jak to pokazać?

Skoro $A^3=A$, to też $J^3=J$ (też było na wykładzie). Potęgowanie macierzy Jordana polega zaś na potegowaniu poszczególnych jej klatek. To oznacza, że wszystkie klatki w J są rozmiarów 1×1, bo tylko wtedy trzecia potęga klatki może być równa niej samej (nad $\mathbb{C}$). Zatem liczba niezerowych elementów na przekątnej macierzy J^2 jest jednocześnie rzędem tej macierzy. Skoro te niezerowe elementy muszą wynosić 1, to liczba ta jest też również sladem J^2. A zatem $r(J^2)=\operatorname{tr}(J^2)$, czyli $r(A^2)=\operatorname{tr}(A^2)$. Skoro J i J^2 są diagonalne, to jest jasne, że $r(A)=r(J)=r(J^2)$. Czyli $r(A)=\operatorname{tr}(A^2)$. ■

Zadanie 7. *Znaleźć obraz wektora $(1,-2,0,1)$ przy symetrii prostopadłej względem $\operatorname{lin}(1,2,2,-1)^\perp$ w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym.*

Rozwiązanie. Niech $(1,-2,0,1)=\alpha+\beta$, gdzie $\alpha\in\operatorname{lin}(1,2,2-1)$ oraz $\beta\in\operatorname{lin}(1,2,2,-1)^\perp$. Wówczas $-\alpha+\beta=(1,-2,0,1)-2\alpha$ jest szukanym obrazem. Wektor α to rzut $(1,-2,0,1)$ na $\operatorname{lin}(1,2,2-1)$, czyli $\frac{\langle (1,-2,0,1),(1,2,2,-1)\rangle}{\langle (1,2,2,-1),(1,2,2,-1)\rangle}(1,2,2,-1)$, czyli $-\frac{2}{5}(1,2,2,-1)$. A zatem szukany obraz to

$$(1,-2,0,1)+\frac{4}{5}(1,2,2,-1)=\left(\frac{9}{5},-\frac{2}{5},\frac{8}{5},\frac{1}{5}\right).$$

■

Zadanie 8. *Dla jakich $s,t\in\mathbb{R}$ istnieje izometria ϕ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym taka, że $\phi(0,4,s)=(4,t,0)$ oraz $\phi(1,-4,1)=(4,1,1)$?*

Rozwiązanie. Skoro ϕ jest izometrią to musi zachowywac standardowy iloczyn skalarny i normę wyznaczoną przez ten iloczyn. A zatem $\|(0,4,s)\|=\|(4,t,0)\|$ oraz $\|(1,-4,1)\|=\|(4,1,1)\|$, a także $\langle(0,4,s),(1,-4,1)\rangle=\langle(4,t,0),(4,1,1)\rangle$. Pierwszy warunek oznacza, że $s^2=t^2$, drugi zaś, że $-16+s=16+t$. A zatem $s\neq t$ i dostajemy $s=-t=16$. Oczywiście istnieje izometria $(\mathbb{R}^3,\langle\,,\,\rangle_{st})$ spełniająca powyższe warunki. Aby wypisać jej wzór wystarczy na przykład zażądać, by wektor $(0,4,16)\times(1,-4,1)$ przechodził przy ϕ na $(4,-16,0)\times(4,1,1)$. ■

Zadanie 9. *Niech $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $k_1,\dots,k_n$ i niech $B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $t_1,\dots,t_n$. Załóżmy, że $\det(A)=-3$ i $\det(B)=-7$. Czy bazy $k_1,\dots,k_n$ i $t_1,\dots,t_n$ są zgodnie zorientowane?*

Rozwiązanie. TAK. Niech $\mathcal{A}=(k_1,\dots,k_n)$ oraz $\mathcal{B}=(t_1,\dots,t_n)$. Zatem $A=M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{st}$ oraz $B=M(\mathrm{id})_{\mathcal{B}}^{st}$. Zatem $M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}=B^{-1}A$. A zatem $\det(M(\mathrm{id})_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})=\det(B^{-1})\det(A)=3/7>0$. A zatem bazy $\mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}$ są zgodnie zorientowane. ■

Zadanie 10. *Podać przykład iloczynu skalarnego na przestrzeni* $\mathbb{R}^2$*, przy którym 2-wymiarowa miara równoległoboku rozpiętego przez wektory* $(-1,1)$ *oraz* $(1,1)$ *równa jest* 3.

Rozwiązanie. Niech $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \frac{3}{2}x_1y_1 + \frac{3}{2}x_2y_2$. Jest to iloczyn skalarny różniący się od standardowego tym, że skalujemy wynik o $3/2$. Przy standardowym iloczynie skalarnym wektory $(-1,1)$ oraz $(1,1)$ są ortogonalne i ich normy wynoszą $\sqrt{2}$. Przy określonym wyżej iloczynie skalarnym wektory te są nadal prostopadłe i ich norma to $\sqrt{3}$. Dla wektorów prostopadłych pole równoległoboku wyliczamy ze wzoru „podstawa razy wysokość” podanego na wykładzie.

Takich iloczynów skalarnych jest oczywiście znacznie więcej. Wystarczy aby macierz Grama układu $((-1,1),(1,1))$ przy szukanym iloczynie skalarnym miała wyznacznik 9. ∎

Zadanie 11. *Niech* $(V,\langle\,,\,\rangle)$ *będzie liniową przestrzenią euklidesową. Czy jest możliwe, by dla pewnego układu* $\mathcal{A}$ *wektorów w przestrzeni* V *wartość własna macierzy Grama* $G(\mathcal{A})$ *układu* $\mathcal{A}$ *była ujemna?*

Rozwiązanie. NIE. Korzystamy z twierdzenia o diagonalizowalności endomorfizmów samosprzężonych. Macierz $G(\mathcal{A})$ jest symetryczną macierzą rzeczywistą, a więc jest macierzą pewnego endomorfizmu samosprężonego. Twierdzenie z wykładu mówi, że istnieje macierz ortogonalna C taka, że macierz $C^TG(\mathcal{A})C = C^{-1}G(\mathcal{A})C = D$ jest diagonalna. Na jej diagonali stoją rzeczywiste wartości własne macierzy $G(\mathcal{A})$ (na mocy podobieństwa z D). Z drugiej strony D jest również macierzą Grama pewnego układu wektorów w V. Istotnie, wiemy, że $G(\mathcal{A}) = G^TG$, dla macierzy G zawierającej współrzędne wektorów z $\mathcal{A}$ w pewnej bazie ortonormalnej $\mathcal{X}$ przestrzeni V. Zatem $C^TG(\mathcal{A})C = C^TG^TGC = (GC)^T(GC)$. Niech $\mathcal{B}$ będzie układem wektorów mających w bazie $\mathcal{X}$ współrzędne stanowiące kolejne kolumny macierzy GC. Wówczas $D = G(\mathcal{B})$. A zatem D zawiera na diagonali wartości $\langle \beta_i,\beta_i\rangle$, gdzie β_i to elementy układu $\mathcal{B}$. To muszą być liczby nieujemne. A zatem $G(\mathcal{A})$ nie ma ujemnych wartości własnych. ∎

Zadanie 12. *Niech* α,β *będą liniowo niezależnymi wektorami w przestrzeni euklidesowej* $(V,\langle\,,\,\rangle)$ *takimi, że* $\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$*. Pokazać, że dla każdego* $t\in(0,1)$ *zachodzi nierówność*

$$\|(1-t)\alpha + t\beta\| < 1.$$

Rozwiązanie. Dowód 1. Korzystamy z nierówności trójkąta, która jest ostra dla wektorów liniowo niezależnych: $\|(1-t)\alpha+t\beta\| < \|(1-t)\alpha\| + \|t\beta\| = 1-t+t = 1$. Ostatni krok jest OK, bo $1-t>0$ i $t>0$.

Dowód 2. Skorzystamy z wniosku z nierówności Schwarza: $\langle v,w\rangle < \|v\|\|w\|$, dla wektorów liniowo niezaleznych $u,v\in V$. Rozpisujemy $\|(1-t)\alpha+t\beta\| = \langle (1-t)\alpha+t\beta,(1-t)\alpha+t\beta\rangle$ i dalej:

$$\begin{aligned}\langle (1-t)\alpha+t\beta,(1-t)\alpha+t\beta\rangle &= \langle (1-t)^2\langle \alpha,\alpha\rangle + t^2\langle\beta,\beta\rangle + (1-t)t\langle\alpha,\beta\rangle + t(1-t)\langle\beta,\alpha\rangle = \\ &= \langle (1-t)^2\|\alpha\|^2 + t^2\|\beta\|^2 + 2(1-t)t\langle\alpha,\beta\rangle \\ &< (1-t)^2\|\alpha\|^2 + t^2\|\beta\|^2 + 2(1-t)t\|\alpha\|\|\beta\| \\ &= (1-t)^2 + t^2 + 2t(1-t) = (1-t+t)^2 = 1\end{aligned}$$

∎