Kolokwium próbne z GAL II, 23 kwietnia 2020 r.

Zadanie 1. *Czy istnieje endomorfizm rzeczywistej przestrzeni liniowej posiadający wektory własne* α, β, γ *o wartościach własnych* $2, 5, -7$*, odpowiednio, spełniające:* $\alpha + \beta + \gamma = 0$*?*

Zadanie 2. *Niech* A *oraz* B *będą macierzami rozmiaru* $n \times n$*. Wiadomo, że wektory* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *są liniowo niezależnymi wektorami własnymi zarówno* A*, jak i* B*, i odpowiadają one kolejno wartościom własnym* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Czy wynika stąd, że* $A = B$*?*

Zadanie 3. *Niech* ϕ *będzie endomorfizmem 7-wymiarowej przestrzeni liniowej* V *nad* $\mathbb{R}$*. Przypuśćmy, że 3 jest wartością własną endomorfizmu* ϕ*, przy czym* $\dim V_{(3)} = 6$ *oraz przypuśćmy, że* ϕ *nie jest monomorfizmem. Czy wynika stąd, że endomorfizm* ϕ *jest diagonalizowalny?*

Zadanie 4. *Pewna macierz* $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{C})$ *spełnia równanie* $(A-I)^3 = 0$*. Wiadomo też, że* $r(A-I)^2 = 2$*. Wykazać, że jedyną wartością własną macierzy* A *jest 1. Opisać postać Jordana macierzy* A*.*

Zadanie 5. *Wyznaczyć bazę Jordana dla endomorfizmu* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *danego wzorem* $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2, -x_1 - x_2 + x_3, x_1 - 2x_3)$ *o wielomianie charakterystycznym* $w_\phi(\lambda) = -(1 + \lambda)^3$*.*

Zadanie 6. *Niech* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$*. Pokazać, że jeśli* $A^3 = A$*, to* $r(A) = \operatorname{tr} A^2$*.*

Zadanie 7. *Znaleźć obraz wektora* $(1, -2, 0, 1)$ *przy symetrii prostopadłej względem* $\operatorname{lin}(1, 2, 2, -1)^\perp$ *w przestrzeni* $\mathbb{R}^4$ *ze standardowym iloczynem skalarnym.*

Zadanie 8. *Dla jakich* $s, t \in \mathbb{R}$ *istnieje izometria* ϕ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *ze standardowym iloczynem skalarnym taka, że* $\phi(0, 4, s) = (4, t, 0)$ *oraz* $\phi(1, -4, 1) = (4, 1, 1)$?

Zadanie 9. *Niech* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *będzie macierzą o kolumnach* $k_1, \ldots, k_n$ *i niech* $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *będzie macierzą o kolumnach* $t_1, \ldots, t_n$*. Załóżmy, że* $\det(A) = -3$ *i* $\det(B) = -7$*. Czy bazy* $k_1, \ldots, k_n$ *i* $t_1, \ldots, t_n$ *są zgodnie zorientowane?*

Zadanie 10. *Podać przykład iloczynu skalarnego na przestrzeni* $\mathbb{R}^2$*, przy którym 2-wymiarowa miara równoległoboku rozpiętego przez wektory* $(-1, 1)$ *oraz* $(1, 1)$ *równa jest* 3*.*

Zadanie 11. *Niech* $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ *będzie liniową przestrzenią euklidesową. Czy jest możliwe, by dla pewnego układu* $\mathcal{A}$ *wektorów w przestrzeni* V *wartość własna macierzy Grama* $G(\mathcal{A})$ *układu* $\mathcal{A}$ *była ujemna?*

Zadanie 12. *Niech* α, β *będą liniowo niezależnymi wektorami w przestrzeni euklidesowej* $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ *takimi, że* $\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$*. Pokazać, że dla każdego* $t \in (0, 1)$ *zachodzi nierówność*

$$\|(1-t)\alpha + t\beta\| < 1.$$