Kolokwium z GALu II, 30 kwietnia 2020 r.

Zadanie 1. *Znajdź wszystkie takie* $s, t \in \mathbb{Z}_5$*, że macierz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 2 & 0 \\ 1 & t & 1 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5)$$

jest diagonalizowalna nad ciałem pięcioelementowym $\mathbb{Z}_5$*.*

Zadanie 2. *Wyznacz macierz* $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{2020}$.

Zadanie 3. *Macierz* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ *spełnia równanie* $A^2 = I$*. Pokaż jest to macierz diagonalizowalna. Jakie wartości własne może mieć ta macierz?*

Zadanie 4. *Które z poniższych czterech macierzy są podobne nad* $\mathbb{C}$*?*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. *Wyznacz bazę* $\mathcal{J}$ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*, w której macierz* $M(\phi)_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}$ *endomorfizmu* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *danego wzorem* $\phi(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_2, 3x_1 + 3x_2 - x_3)$ *ma postać Jordana.*

Zadanie 6. *Niech* ϕ *będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej* $\mathbb{R}^3$*. Czy wynika stąd, że istnieją niezerowe podprzestrzenie* ϕ*-niezmiennicze* V, W *takie, że* $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$*?*

Zadanie 7. *Niech* $(V, \langle\, , \rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową oraz niech* $\mathcal{A}$ *będzie takim liniowo niezależnym układem wektorów w przestrzeni* V*, że macierz Grama* $G(\mathcal{A})$ *ma jedynie wyrazy równe* 0 *lub* 1*. Pokazać, że* $G(\mathcal{A})$ *jest wówczas macierzą identycznościową.*

Zadanie 8. *Rozpatrzmy funkcję* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *daną wzorem*

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (4 - r)x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + rx_3y_3.$$

Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ *funkcja* f *jest iloczynem skalarnym na przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*? Dla jakich* $r \in \mathbb{R}$ *funkcja* $f|_W$ *jest iloczynem skalarnym na przestrzeni* $W = \operatorname{lin}((1, 1, -1), (0, 1, 1))$*?*

Zadanie 9. *Macierz* A *pewnej izometrii przestrzeni euklidesowej* $\mathbb{R}^3$ *ze standardowym iloczynem skalarnym ma ślad równy* -2*. Wykaż, że izometria ta jest złożeniem obrotu i pewnej symetrii prostopadłej.*

Zadanie 10. *Znajdź rzeczywistą macierz ortogonalną* P *taką, że macierz* $P^T AP$ *jest diagonalna, gdzie*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 11. *Niech* $(\mathbb{R}^2, \langle\, , \rangle)$ *będzie przestrzenią euklidesową. Wykaż, że miara* 2*-wymiarowa równoległoboku rozpiętego przez wektory* $(1, 0)$ *oraz* $(0, 1)$ *równa jest mierze* 2*-wymiarowej równoległoboku rozpiętego przez wektory* $(1, 0)$ *oraz* $(1, 1)$*.*

Zadanie 12. *Niech układ* $(v_1, ..., v_n)$ *będzie bazą zorientowanej przestrzeni euklidesowej* $(V, \langle, \rangle)$*. Ile jest zachowujących orientację izometrii* $\phi : V \to V$ *takich, że* $\phi(\operatorname{lin}(v_1, ..., v_i)) = \operatorname{lin}(v_1, ..., v_i)$ *dla wszystkich* $i = 1, ..., n$*?*