# Egzamin poprawkowy z GAL II,
# 9 września 2020 r.

**Zadanie 1.** *Wyznaczyć, w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, macierz $J_a$ endomorfizmu $\phi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie Jordana, przy czym*

$$M(\phi_a)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 4 \\ 0 & -1 & a+2 \end{bmatrix}.$$

*Wyznaczyć bazę Jordana przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dla endomorfizmu $\phi_2$.*

**Zadanie 2.** *Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ będzie macierzą postaci:*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*(a) Niech $\phi$ będzie endomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadanym w bazie standardowej macierzą $A$. Wskazać wszystkie podprzestrzenie $\phi$-niezmiennicze wymiaru 2 w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.*
*(b) Udowodnić, że $A^{2n} = nA^2 - (n-1)I$, dla każdego całkowitego $n \geqslant 1$. Można skorzystać z Twierdzenia Cayleya-Hamiltona.*

**Zadanie 3.** *Pokazać, że jeśli macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest ortogonalna i diagonalizowalna, to $A^2 = I$ (gdzie $I$ jest macierzą jednostkową). Podać przykład macierzy ortogonalnej $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ takiej, że $A^2 \neq I$ oraz $A^3 = I$.*

**Zadanie 4.** *Niech $(\mathbb{R}^4, h)$ będzie przestrzenią dwuliniową, w która w bazie standardowej zadana jest przez macierz:*

$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

*(a) Znaleźć bazę, w której macierz formy $h$ jest diagonalna z $1$, $-1$ lub $0$ na przekątnej.*
*(b) Czy istnieje podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^4$ wymiaru 3, że po obcięciu forma $h|_W$ jest nieosobliwa na $W$?*

**Zadanie 5.** *W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^3$ (ze standardowym iloczynem skalarnym na przestrzeni stycznej) dana jest podprzestrzeń afiniczna $H = (-1,0,-1) + \operatorname{lin}((1,0,2),(0,1,2))$ i prosta $K = (3,1,0) + \operatorname{lin}((1,1,-5))$. Znaleźć równanie opisujące $H$. Znaleźć obraz prostej $K$ przy symetrii prostopadłej względem $H$.*

**Zadanie 6.** *W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest prosta $L = p + \operatorname{lin}(\alpha_1)$ i płaszczyzna $H = p + \operatorname{lin}(\alpha_1, \alpha_2)$, gdzie $p = (1,2,3), \alpha_1 = (-1,0,1), \alpha_2 = (-1,1,3)$. Zbadać, ile jest izometrii afinicznych $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takich, że $f(q) = q$, dla każdego $q \in L$ oraz $f(H) = H$. Opisać każdą taką izometrię $f$ podając wartości pochodnej $f'$ na wybranej bazie ortonormalnej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.*

**Zadanie 7.** *Określić typ afiniczny hiperpowierzchni $X, Y$ zadanych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ równaniami:*
*(a) $X \,:\, x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 1 = 0$,*
*(b) $Y \,:\, x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2 = 0$.*
*Czy istnieje przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $f(X) = Y$?*

**Zadanie 8.** *Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 1 = 0\}$. Znaleźć zbiór środków symetrii hiperpowierzchni $X$. Określić typ afiniczny krzywej $M \cap X$, gdzie*

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 - x_3 - 1 = 0\}.$$

**Zadanie 9.** *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

*(a) Dla jakich $a \in \mathbb{C}$ macierze $A, B$ są kongruentne nad $\mathbb{C}$?*

*(b) Udowodnij, że dla $a < -1$ macierze $A, B$ nie są kongruentne nad $\mathbb{R}$.*

*(c) Czy istnieje $a \in \mathbb{R}$, dla którego podane macierze są kongruentne nad $\mathbb{R}$? Jeśli tak, to proszę wskazać takie $a$.*

**Zadanie 10.** *Rozważmy macierz $A \in M_{7\times 7}(\mathbb{R})$ następującej postaci:*

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*(a) Wyznaczyć wielomian charakterystyczny macierzy $A$.*
*(b) Niech $\phi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ będzie przekształceniem liniowym o macierzy $M(\phi)_{st}^{st} = A$. Pokazać, że*

$$\ker(\phi^7 - \mathrm{id}) = \ker(\phi - \mathrm{id}).$$

*(c) Królewna Śnieżka rozdzieliła 3 litry mleka pomiędzy siedem kubków należących do siedmiu krasnoludków. Następnie pierwszy z krasnoludków rozdzielił zawartość swojego kubka po równo pomiędzy pozostałe krasnoludki (sobie nic nie zostawił). Następnie drugi krasnoludek rozdzielił zawartość swojego kubka po równo pomiędzy pozostałe krasnoludki, a za nim robiły to kolejne krasnoludki. Gdy ostatni, siódmy krasnoludek rozdzielił zawartość swojego kubka pomiędzy pozostałych okazało się, że w kubku każdego z krasnoludków jest dokładnie tyle samo mleka, co na początku – gdy otrzymał je od Królewny Śnieżki. W jaki sposób Królewna rozdzieliła mleko między krasnoludki?*