Egzamin z GAL II, 23 czerwca 2020 r.

Zadanie 1. *Rozważmy endomorfizmy ϕ, ψ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadane macierzami symetrycznymi:*

$$M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad M(\psi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć podprzestrzenie własne endomorfizmów ϕ oraz ψ. Znaleźć wszystkie podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$, które są jednocześnie ϕ-niezmiennicze i ψ-niezmiennicze.

Zadanie 2. *Niech $A \in M_{3\times 3}(K)$ będzie niezerową macierzą diagonalizowalną nad ciałem K. Pokazać, że następujące trzy wielkości są równe:*
(1) rząd macierzy A,
(2) $max\{i : a_i \neq 0\}$, gdzie $-\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A,
(3) rozmiar największego nieosobliwego minora głównego macierzy A, czyli odwracalnej macierzy kwadratowej powstałej z A przez wykreślenie wierszy i kolumn o tych samych indeksach.
Pokazać, że bez założenia o diagonalizowalności macierzy A teza zadania nie jest prawdziwa.

Zadanie 3. *Dane są formy kwadratowe $q_1, q_2 : K^2 \to K$, przy czym $q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ oraz $q_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2$. Pokazać, że jeśli K jest ciałem pięcioelementowym $\mathbb{Z}_5$, to formy q_1, q_2 są równoważne. Czy formy te są równoważne także wtedy, gdy za K przyjmiemy dowolne z ciał $\mathbb{Z}_p$, gdzie $p > 2$ jest liczbą pierwszą?*

Zadanie 4. *W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są punkty $p = (0, 1, 3)$ i $q = (0, -1, -1)$ oraz wektory $\alpha = (1, -1, 0)$ i $\beta = (1, 1, 1)$. Wyznaczyć rzut prostopadły punktu q na płaszczyznę $p + \text{lin}(\alpha, \beta)$. Wyznaczyć wartość parametru $s \in \mathbb{R}$, dla którego odległość punktu q od prostej $l_s = p + \text{lin}(\alpha + s\beta)$ osiąga najmniejszą wartość.*

Zadanie 5. *Opisać układem równań prostą w przestrzeni euklidesowej $V = (\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle)$ ze standardowym iloczynem skalarnym złożoną z punktów γ (traktowanych jako wektory w $\mathbb{R}^3$) spełniających warunek: $(-3, 1, 0) \times \gamma = (0, 0, 3)$. Niech $\alpha \neq 0$ oraz β należą do V. Pokazać, że zbiór $\{\gamma \in V : \alpha \times \gamma = \beta\}$ jest prostą lub zbiorem pustym i określić dla jakich $\alpha, \beta \in V$ zachodzi każdy z tych przypadków.*

Zadanie 6. *W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są proste:*

$$K = (1, 2, 0) + \text{lin}((1, 1, -1)) \text{ oraz } L = (0, 1, 0) + \text{lin}((1, 1, 1))$$

oraz punkty $a = (1, 0, 1)$ i $b = (1, 3, 0)$. Zbadać ile jest izometrii afinicznych $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takich, że $f(a) = b$ oraz $f(K) \subset L$. Opisać każdą taką izometrię f podając wartości pochodnej f' na wybranej bazie ortonormalnej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 7. *Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X zadanych równaniami:*
$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 2 = 0\}$,
$Y = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + 6x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_2 + 2x_3 + 1 = 0\}$.

Zadanie 8. *Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - 2x_1 - 2x_2x_3 + 4x_2 + 2x_3^2 + 6 = 0\}$. Znaleźć zbiór środków symetrii hiperpowierzchni X. Określić typ afiniczny krzywej $M \cap X$, gdzie $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 1 = 0\}$.*

Zadanie 9. *Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną oraz niech $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą identycznościową. Pokazać, że jeśli wszystkie wartości własne macierzy A leżą w przedziale $(0, 1)$ to dla dowolnego $r > 0$ istnieje k takie, że forma kwadratowa na $\mathbb{R}^n$ mająca w pewnej bazie macierz $rI - A^k$ jest dodatnio określona (gdzie A^k to k-ta potęga macierzy A).*

Zadanie 10. *Dana jest sześcienna kostka o zbiorze ścian $X = \{x_1, \ldots, x_6\}$. Niech $V = F(X, \mathbb{R})$ będzie przestrzenią liniową funkcji $f : X \to \mathbb{R}$ nad ciałem $\mathbb{R}$. Na przestrzeni V określamy iloczyn skalarny wzorem $\langle f, g\rangle = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)g(x_i)$. Niech $x^* \in X$ będzie ścianą leżącą naprzeciw ściany $x \in X$ oraz niech $N(x)$ to zbiór ścian sąsiadujących ze ścianą $x \in X$. Niech*

$$V_1 = \{f \in V : f \text{ jest stała}\}, \quad V_2 = \{f \in V : \sum_{x\in X} f(x) = 0 \text{ oraz } f(x^*) = f(x) \text{ dla } x \in X\}.$$

Pokazać, że V_1, V_2 są wzajemnie ortogonalne, tzn. $V_i \subset V_j^{\perp}$, dla $i \neq j$. Pokazać, że podprzestrzenie V_1, V_2 są L-niezmiennicze, gdzie $L : V \to V$ dane jest wzorem:

$$(Lf)(x) = \frac{1}{4} \sum_{y\in N(x)} f(y).$$

Pokazać, że $\lim\limits_{n\to\infty} (L^n f)(x)$ nie zależy od wyboru $x \in X$, gdzie $L^n f = (\underbrace{L \circ L \circ \ldots \circ L}_{n})(f)$.