GAL 2 Egzamin , 20 czerwca 2018, **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1[36 pt] Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_1 - 2x_2)$$

oraz dla $s \in \mathbb{R}$ niech $A_s = \begin{pmatrix} -1 & 2 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych.

(a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A_s$?

(b) Znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu φ.

(c) Podać przykład takiej macierzy B, że $B^9 = A_0$ i obliczyć $(A_0)^n$ dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie 2 [36 pt]

Rozważmy afiniczną przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^3, <,>_{\mathrm{st}})$, gdzie $<,>_{\mathrm{st}}$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Niech $K = (1,1,1) + \mathrm{lin}((2,0,1))$ i $L = (1,2,1) + \mathrm{lin}((1,0,-2))$.

(a) Zaleźć wzór na takie przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $f(p) = p$ dla $p \in L$ i $f((1,1,1) + t(2,0,1)) = (1,2,1) + t(1,0,-2)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(b) Znaleźć odległość $\varrho(K, L)$ między prostymi K i L.

(c) Ile jest takich izometrii $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $f((1,1,1) + t(2,0,1)) = (1,2,1) + t(1,0,-2)$ dla $t \in \mathbb{R}$ i $f(L) = K$?

Zadanie 3[48pt]

Rozważmy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ formę kwadratową $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2x_3.$$

Niech $h_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ oznacza taką symetryczną formę dwuliniową, że $q_a(\alpha) = h_a(\alpha, \alpha)$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}^3$, $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ i niech $X_a \subset \mathbb{R}^3$ dla $a \in \mathbb{R}$ będzie hiperpowierzchnią opisana równaniem

$$ax_1^2 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 1 = 0$$

(a) W zależności od $a \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd i sygnaturę formy kwadratowej q_a.

(b) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ w przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h_a)$ zachodzi $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$?

(c) W zależności od $a \in \mathbb{R}$ podać typ afiniczny hiperpowierzchni X_a (podać nazwę i naszkicować).

(d) Podać typ afiniczny krzywej $X_1 \cap W$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL 2, Egzamin, 20 czerwca 2018, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie zadania 4 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4 [40 pt]

Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$.

(a) Załóżmy, że $\dim V \geqslant 4$ i $0 \neq \alpha \in V$ jest wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i $W_2 \neq W_1$ wymiaru 3 przestrzeni V takie, że przestrzeń dwuliniowa $(W_i, h|_{W_i \times W_i})$ jest nieosobliwa dla $i = 1, 2$ oraz $\alpha \in W_1 \cap W_2$.

(b) Załóżmy, że $\dim V \geqslant 3$ i $0 \neq \alpha \in V$ jest wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i $W_2 \neq W_1$ wymiaru 2 przestrzeni V takie, że przestrzeń dwuliniowa $(W_i, h|_{W_i \times W_i})$ jest nieosobliwa dla $i = 1, 2$ oraz $\mathrm{lin}(\alpha) = W_1 \cap W_2$.

Zadanie 5 [8 x 5 pt] Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania :

1. Niech $V = W_1 \oplus W_2$, gdzie V jest przestrzenią wymiaru skończonego nad $\mathbb{R}$ i niech W_1, W_2 będą właściwymi podprzestrzeniami liniowymi V. Czy (-1) może może być wartością własną endomorfizmu $\varphi : V \to V$ będącego rzutem na W_1 wzdłuż W_2 ?

2. Niech V będzie przestrzenią wymiaru 3 nad $\mathbb{C}$. Czy może istnieć endomorfizm $\varphi : V \to V$ taki, że endomorfizmy $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, ..., \varphi^9$ tworzą bazę przestrzeni $\mathrm{End}(V)$?

3. Niech H będzie przestrzenią afiniczną wymiaru 6 i niech M_1, M_2 będą podprzestrzeniami afinicznymi H wymiaru 4. Czy może mieć miejsce równość $\dim M_1 \cap M_2 = 1$?

4. Niech $(H, <, >)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową i niech funkcja $f : H \to H$ zachowuje odległość (tj. $\varrho(p, q) = \varrho(f(p), f(q))$ dla każdych $p, q \in H$. Czy $f(H) = H$?

5. Niech $(H, <, >)$ będzie afiniczna przestrzenią euklidesową wymiaru 5 i niech M będzie taką podprzestrzenią afiniczną H, że symetria prostopadła wzgędem M nie zmienia orientacji H. Jaki wymiar może mieć M?

6. Rozważmy takie przekształcenia afiniczne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, że $f((0, 0, ..., 0)) = (0, 0, ..., 0)$. Czy f jest przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ w przestrzeń liniową $\mathbb{R}^m$?

7. Niech (V, h) przestrzeń dwuliniowa nad $\mathbb{Q}$ i niech $\alpha \neq 0$ będzie wektorem izotropowym. Czy może mieć miejsce równość $W = \mathrm{lin}(\alpha) \oplus (\mathrm{lin}(\alpha))^{\perp}$?

8. Hiperpowierzchnie $X \subset \mathbb{R}^4$ jest opisana równaniem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_1 = 0$. Czy X posiada środek symetri, który do niej nie należy?

GAL 2 Egzamin , 20 czerwca 2018, **Temat B**

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1[36 pt] Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (-2x_2 - x_3, -x_2, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$

oraz dla $s \in \mathbb{R}$ niech $A_s = \begin{pmatrix} 1 & -2 & s \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych.

(a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A_s$?

(b) Znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu φ.

(c) Podać przykład takiej macierzy B, że $B^9 = A_0$ i obliczyć $(A_0)^n$ dla każdej liczby naturalnej n.

Zadanie 2 [36 pt]
Rozważmy afiniczną przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^3, <,>_{\mathrm{st}})$, gdzie $<,>_{\mathrm{st}}$ oznacza standardowy iloczyn skalarny. Niech $K = (1,1,2) + \mathrm{lin}((2,1,0))$ i $L = (1,1,1) + \mathrm{lin}((1,-2,0))$.

(a) Znleźć wzór na takie przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $f(p) = p$ dla $p \in L$ i $f((1,1,2) + t(2,1,0)) = (1,1,1) + t(1,-2,0)$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(b) Znaleźć odległość $\varrho(K, L)$ między prostymi K i L.

(c) Ile jest takich izometrii $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że $f((1,1,2) + t(2,1,0)) = (1,1,1) + t(1,-2,0)$ dla $t \in \mathbb{R}$ i $f(L) = K$?

Zadanie 3[48pt]
Rozważmy dla każdego $a \in \mathbb{R}$ formę kwadratową $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = ax_3^2 + 2x_1x_2.$$

Niech $h_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ oznacza taką symetryczną formę dwuliniową, że $q_a(\alpha) = h_a(\alpha, \alpha)$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}^3$, $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ i niech $X_a \subset \mathbb{R}^3$ dla $a \in \mathbb{R}$ będzie hiperpowierzchnią opisana równaniem

$$ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_3 + 1 = 0$$

(a) W zależności od $a \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rząd i sygnaturę formy kwadratowej q_a.

(b) Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ w przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h_a)$ zachodzi $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$?

(c) W zależności od $a \in \mathbb{R}$ określić typ afiniczny hiperpowierzchni X_a (podać nazwę i naszkicować).

(d) Podać typ afiniczny krzywej $X_1 \cap W$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL 2, Egzamin, 20 czerwca 2018, **Temat B**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie zadania 4 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4 [40 pt]

Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową nad $\mathbb{R}$.

(a) Załóżmy, że $\dim V \geqslant 4$ i $0 \neq \alpha \in V$ jest wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i $W_2 \neq W_1$ wymiaru 3 przestrzeni V takie, że przestrzeń dwuliniowa $(W_i, h|_{W_i \times W_i})$ jest nieosobliwa dla $i = 1, 2$ oraz $\alpha \in W_1 \cap W_2$.

(b) Załóżmy, że $\dim V \geqslant 3$ i $0 \neq \alpha \in V$ jest wektorem izotropowym. Pokazać, że istnieją podprzestrzenie liniowe W_1 i $W_2 \neq W_1$ wymiaru 2 przestrzeni V takie, że przestrzeń dwuliniowa $(W_i, h|_{W_i \times W_i})$ jest nieosobliwa dla $i = 1, 2$ oraz $\mathrm{lin}(\alpha) = W_1 \cap W_2$.

Zadanie 5 [8 x 5 pt] Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania :

1. Niech $V = W_1 \oplus W_2$, gdzie V jest przestrzenią wymiaru skończonego nad $\mathbb{R}$ i niech W_1, W_2 będą właściwymi podprzestrzeniami liniowymi V. Czy (-1) może może być wartością własną endomorfizmu $\varphi : V \to V$ będącego rzutem na W_1 wzdłuż W_2 ?

2. Niech V będzie przestrzenią wymiaru 3 nad $\mathbb{C}$. Czy może istnieć endomorfizm $\varphi : V \to V$ taki, że endomorfizmy $\varphi, \varphi^2, \varphi^3, ..., \varphi^9$ tworzą bazę przestrzeni $\mathrm{End}(V)$?

3. Niech H będzie przestrzenią afiniczną wymiaru 6 i niech M_1, M_2 będą podprzestrzeniami afinicznymi H wymiaru 4. Czy może mieć miejsce równość $\dim M_1 \cap M_2 = 1$?

4. Niech $(H, <,>)$ będzie afiniczna przestrzenią euklidesową i niech funkcja $f : H \to H$ zachowuje odległość (tj. $\varrho(p,q) = \varrho(f(p), f(q))$ dla każdych $p, q \in H$. Czy $f(H) = H$?

5. Niech $(H, <,>)$ będzie afiniczna przestrzenią euklidesową wymiaru 5 i niech M będzie taką podprzestrzenią afiniczną H, że symetria prostopadła wzgędem M nie zmienia orientacji H. Jaki wymiar może mieć M?

6. Rozważmy takie przekształcenia afiniczne $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, że $f((0,0,...,0)) = (0,0,...,0)$. Czy f jest przekształceniem liniowym przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ w przestrzeń liniową $\mathbb{R}^m$?

7. Niech (V, h) przestrzeń dwuliniowa nad $\mathbb{Q}$ i niech $\alpha \neq 0$ będzie wektorem izotropowym. Czy może mieć miejsce równość $W = \text{lin}(\alpha) \oplus (\text{lin}(\alpha))^\perp$?

8. Hiperpowierzchnie $X \subset \mathbb{R}^4$ jest opisana równaniem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_1 = 0$. Czy X posiada środek symetri, który do niej nie należy?