GAL 2 Egzamin - drugi termin, 5 września 2017, **Temat A**

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1[40 pt]

Niech $A_t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & t \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ dla $t \in \mathbb{R}$ i niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 2x_3, 2x_2, 2x_3)$ dla $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Znaleźć postać Jordana macierzy A_t w zależności od wartości parametru $t \in \mathbb{R}$.

(b) Znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu ϕ.

(c) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ istnieje taka baza $\mathcal{A}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$, że sA_t jest macierzą endomorfizmu ϕ^2 w bazie $\mathcal{A}$?

Zadanie 2[40 pt]

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są proste $K = (1.0, -1) + \mathrm{lin}((1, 0, 1))$ i $L = (1, 0, 1) + \mathrm{lin}((1, -1, 0))$.
(a) Znaleźć przedstawienie parametryczne obrazu prostej L w symetrii prostopadłej względem K.

(b) Znaleźć odległość $\rho(K, L)$ między prostymi K i L.

(c) Podać wzór na przekształcenie afiniczne przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takie, że $f(p) = p$ dla każdego $p \in K$ i $f(L) = \{(1, 0, 1))\}$.

Zadanie 3[40 pt]

Niech X_t będzie hiperpowierzchnią w $\mathbb{R}^3$ opisana równaniem
$x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - x_1 + x_2 + tx_3 = 0$ i niech P będzie płaszczyzną opisana równaniem $x_1 - x_2 = 0$.

(a) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X_t w zależności od $t \in \mathbb{R}$ i wykonać szkicowe rysunki.

(b) Wyznaczyć w zależności od $t \in \mathbb{R}$ zbiór środków symetrii X_t.

(c) Określić typ afiniczny krzywej $X_0 \cap P$.

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL 2, Egzamin - drugi termin 5 września 2017, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie zadania 4 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4[40 pt]
Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniową nad ciałem Ki niech $W \subset V$ będzie taką podprzestrzenią liniową, że $h(\alpha, \beta) = 0$ dla każdych $\alpha, \beta \in W$.

(a) Pokazać, że $\dim V \geqslant 2 \dim W$.

(b) Pokazać, że istnieje zawierająca W podprzestrzeń liniowa $U \subset V$ wymiaru $2 \dim W$ taka, że forma dwuliniowa $h|_{U \times U} : U \times U \to K$ jest nieosobliwa.

Zadanie 5 [8 x 5 pt] Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania :
1. Ile jest klas podobieństwa macierzy $A \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$ o wielomianie charakterystycznym $(i - \lambda)^3$?

2. Czy istnieje macierz $A \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$ taka, że macierze $I, A, A^2, ..., A^8$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $M_{3\times3}(\mathbb{C})$?

3. Załóżmy, że H jest przestrzenią afiniczna wymiaru $n \geqslant 3$. Czy jest prawdą, że dla każdych dwóch prostych $L, K \subset H$ istnieje zawierająca je podprzestrzeń afiniczna $M \subset H$ wymiaru 3 ?

4. Niech układ punktów p_0, p_1, p_2, p_3 będzie bazą punktową przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $q = \frac{1}{4}p_0 + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_2 + \frac{1}{4}p_3$. Czy jest prawdą, że układ q, p_1, p_2, p_3 także jest bazą punktową $\mathbb{R}^3$?

5. Załóżmy, że H jest przestrzenią afiniczną nad $\mathbb{R}$, $L, K \subset H$ są dwoma rozłącznymi prostymi w H i $P \subset H$ jest płaszczyzną. Czy może istnieć przekształcenie afiniczne $f : H \to H$ takie, że $f(P) = L \cup K$?

6. Macierze symetryczne $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ są kongruentne nad $\mathbb{R}$. Czy jest prawdą, że jeżeli A jest macierzą iloczynu skalarnego, to B również jest macierzą iloczynu skalarnego?

7. Czy istnieje symetryczna forma dwuliniowa nieosobliwa $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nie będąca iloczynem skalarnym, ale spełniająca warunek $h(\alpha, \alpha) \neq 0$ dla każdego $\alpha \neq 0$?

8. Czy hiperpowierzchnia $X \subset \mathbb{R}^n$ opisana równaniem $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + x_n = 0$ posiada środek symetrii?