GAL 2 Egzamin , 21 czerwca 2017, **Temat A**

- Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
- Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
- Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1[40 pt] Niech $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_3) = (x_1 + x_4, x_2 + x_4, x_3 + x_4, x_4)$$

i dla każdych $s, t \in \mathbb{R}$ niech

$$A_{(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & s & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M(\mathbb{R})_{4\times 4}.$$

(a) Znaleźć postać Jordana macierzy $A_{(s,t)}$ w zależności od wartości parametrów $s, t \in \mathbb{R}$

(b) Czy istnieją $s, t \in \mathbb{R}$ takie, że macierz $A_{(s,t)} = M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ jest macierzą endomorfizmu φ w pewnej bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$?

(c) Znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu φ.

Zadanie 2 [40 pt] Rozważmy afiniczną przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^4, <,>_{\mathrm{st}})$, gdzie $<,>_{\mathrm{st}}$ oznacza standardowy iloczyn euklidesowy. Niech $P \subset \mathbb{R}^4$ będzie płaszczyzna opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Ile jest takich przekształceń afinicznych $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, że $f(p) = f((-2, -4, 1, 2)) = (1, 0, 0, 0)$ dla każdego $p \in P$ oraz $f((0, 1, 0, 0)) = (-1, 0, 0, 0)$?
(b) Znaleźć obraz punktu $(-2, -4, 1, 2)$ przy rzucie prostopadłym $\mathbb{R}^4$ na P.
(c) Ile jest takich izometrii $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, że $f((-2, -4, 1, 2)) = (-2, -4, 1, 2)$ i $f(p) = p$ dla każdego $p \in P$?

Zadanie 3[40pt] Niech $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie dla $a \in \mathbb{R}$ forma kwadratową zadaną wzorem

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 - x_2^2 + 2x_2x_3.$$

(a) Wyznaczyć rząd i sygnaturę q_a w zależności od a.
(b) Wyznaczyć środki symetrii X i podać typ afiniczny hiperpowierzchni X opisanej równaniem $q_1(x_1, x_2, x_3) - 4x_1 + 2 = 0$.
(c) Czy istnieje układ bazowy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taki, że X jest w nim opisana równaniem $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2 = 0$. Jeśli tak podać przykład takiego izomorfizmu afinicznego $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że hiperpowierzchnia $f(X)$ jest w nim opisana powyższym równaniem.

GAL 2 Egzamin , 21 czerwca 2017, **Temat B**

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę tematu.

Zadanie 1 [40 pt] Niech $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_3) = (-x_1 + x_4, -x_2 + x_4, -x_3 + x_4, -x_4)$$

i dla każdych $s, t \in \mathbb{R}$ niech

$$A_{(s,t)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & s & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M(\mathbb{R})_{4\times 4}.$$

(a) Znaleźć postać Jordana macierzy $A_{(s,t)}$ w zależności od wartości parametrów $s, t \in \mathbb{R}$

(b) Czy istnieją $s, t \in \mathbb{R}$ takie, że macierz $A_{(s,t)} = M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest macierzą endomorfizmu φ w pewnej bazie $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$?

(c) Znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu φ.

Zadanie 2 [40 pt] Rozważmy afiniczną przestrzeń euklidesową $(\mathbb{R}^4, <,>_{\mathrm{st}})$, gdzie $<,>_{\mathrm{st}}$ oznacza standardowy iloczyn euklidesowy. Niech $P \subset \mathbb{R}^4$ będzie płaszczyzna opisaną układem równań:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Ile jest takich przekształceń afinicznych $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, że $f(p) = f((-4, -2, 2, 1)) = (1, 0, 0, 0)$ dla każdego $p \in P$ oraz $f((1, 0, 0, 0)) = (-1, 0, 0, 0)$?
(b) Znaleźć obraz punktu $(-4, -2, 2, 1)$ przy rzucie prostopadłym $\mathbb{R}^4$ na P.
(c) Ile jest takich izometrii $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, że $f(-4, -2, 2, 1) = (-4, -2, 2, 1)$ i $f(p) = p$ dla każdego $p \in P$?

Zadanie 3 [40pt] Niech $q_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie dla $a \in \mathbb{R}$ forma kwadratową zadaną wzorem

$$q_a(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + ax_2^2 + 2x_1x_3.$$

(a) Wyznaczyć rząd i sygnaturę q_a w zależności od a.
(b) Wyznaczyć środki symetrii X i podać typ afiniczny hiperpowierzchni X opisanej równaniem $q_1(x_1, x_2, x_3) - 4x_2 + 2 = 0$.
(c) Czy istnieje układ bazowy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taki, że X jest w nim opisana równaniem $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2 = 0$. Jeśli tak podać przykład takiego izomorfizmu afinicznego $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, że hiperpowierzchnia $f(X)$ jest w nim opisana powyższym równaniem.