Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

GAL 2, Egzamin, 21 czerwca 2017, **Temat A**

Podpisać niniejszą kartkę i wpisać w puste miejsca odpowiedzi wraz z uzasadnieniami na każde z pytań z zadania 5. Rozwiązanie zadania 4 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach.

Zadanie 4 [40 pt] Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru skończonego nad $\mathbb{C}$.
(a) Pokazać, że jeżeli $\phi : V \to V$ i $\varphi : V \to V$ są takimi endomorfizmami przestrzeni V, że $\phi\varphi = \varphi\phi$, to podprzestrzeń liniowa $V_{(\lambda)}$ złożona z wektora zerowego i wszystkich wektorów własnych ϕ odpowiadających wartości własnej λ jest φ-niezmiennicza tj. $\varphi(V_{(\lambda)}) \subset V_{(\lambda)}$.
(b) Niech $\mathcal{T} = \{\phi_t : V \to V\}_{t\in T}$ będzie taką rodziną endomorfizmów przestrzeni V, że $\phi_s\phi_t = \phi_t\phi_s$ dla każdych $s, t \in T$. Pokazać, że istnieje wspólny wektor własny dla wszystkich endomorfizmów należących do rodziny $\mathcal{T}$.

Zadanie 5 [8 x 5 pt] Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania :
1. Niech V będzie przestrzenią wymiaru skończonego nad $\mathbb{R}$. Czy istnieje endomorfizm $\varphi : V \to V$ taki, że $\dim \ker \varphi > 0$ i φ nie ma wektorów własnych?

2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ i $\dim V = 6$. Czy istnieje endomorfizm $\varphi : V \to V$ o wartościach własnych $2, -2, 0$ taki, że $\dim V_{(2)} = 3$, $\dim V_{(-2)} = 3$ i $\dim V_{(0)} = 3$?

3. Czy istnieje izometria afiniczna $f : H \to H$ afinicznej przestrzeni euklidesowej $(H, <, >)$ taka, że $f(H)$ jest właściwym podzbiorem H?

4. Niech $f : H \to H$ będzie przekształceniem afinicznym przestrzeni afinicznej H nad $\mathbb{C}$ i niech q_0, q_1, q_2 będzie afinicznie niezależnym układem punktów H. Czy może się zdarzyć, że $f(q_0) = q_0$, $f(q_1) = q_1$ i $f(\frac{1}{2}q_0 + \frac{1}{2}q_1) = q_2$?

5. Niech (V, h) nieosobliwa przestrzeń dwuliniowa i niech $\dim V = 8$. Czy może istnieć podprzestrzeń liniowa $W \subset V$ wymiaru 4 taka, że $h(\alpha, \beta) = 0$ dla każdych $\alpha, \beta \in W$?

6. Niech (V, h) przestrzeń dwuliniowa, $V = W \oplus W^{\perp}$ i niech przestrzenie dwuliniowe $(W, h_{|W \times W})$ i $(W^{\perp}, h_{|W^{\perp} \times W^{\perp}})$ będą nieosobliwe. Czy przestrzeń dwuliniowa (V, h) może być osobliwa?

7. Załóżmy, że X jest hiperpowierzchnią stopnia 2 w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$. Czy może się zdarzyć, ze X zawiera płaszczyznę?

8. Czy jest prawdą, że hiperpowierzchnie w $\mathbb{R}^n$ opisane równaniami $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 + 10x_n = 0$ oraz $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2 - 10x_n = 0$ mają ten sam typ afiniczny?