GAL II, Kolokwium 2 TEMAT **A** 23.05.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Dane są formy dwuliniowe g oraz h na przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takie, że forma g zadana jest wzorem: $g((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1+2x_2y_2+tx_3y_3+sx_1y_3+3x_3y_1$, a w bazie $\mathcal{A} = \{(0,1,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ forma h ma macierz $G(h;\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Obliczyć $G(h;\mathrm{st})$.

   (b) Dla jakich $s,t \in \mathbb{R}$ forma g jest symetryczna?

   (c) Dla jakich $s,t \in \mathbb{R}$ forma g jest iloczynem skalarnym?

2. [18 punktów]

   W $\mathbb{R}^4$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.

   (a) Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$.

   (b) Znaleźć układ równań opisujący przestrzeń $W^\perp$.

   (c) Niech $\alpha_t = (t^2,0,1,t)$ i niech β_t będzie rzutem prostopadłym wektora α_t na prostą $lin((1,1,1,1))$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ długość wektora β_t jest najmniejsza?

3. [10 punktów]

   Niech $(V, <\ ,\ >)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową, $\mathcal{A}$ jej bazą ortonormalną i niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $A = M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$. Wykazać, że:

   φ jest izometrią przestrzeni $(V, <\ ,\ >)$ $\iff$ A^TA jest macierzą jednostkową.

GAL II, Kolokwium 2 TEMAT **A** 23.05.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na oddzielnych kartkach. Kartka z treścią zadań może być użyta do wpisania rozwiązań zadania 5.

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

W $\mathbb{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.

(a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ przekształcenie $f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem $f_s((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{5}(sx_2, 3x_1 - 4x_3, 4x_1 + 3x_3)$ jest izometrią?

(b) Niech $p = (1, 1, 2)$ i niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 7\}$ oraz niech q będzie rzutem prostopadłym punktu p na płaszczyznę M. Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie izometrią spełniającą warunki: $g(p) = p$ oraz $\forall z \in M \;\; g(z) \in M$. Wyznaczyć $g(q)$.

(c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje izometria $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniająca: $f((1, 3, 1)) = (0, 1, 2)$, $f((3, 2, 3)) = (t, 3, 4)$? Dla każdego takiego t podać przykład odpowiadającej mu izometrii.

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) Dane są macierze symetryczne $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ spełniające $B = C^T AC$ dla pewnej macierzy odwracalnej $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Przypuśćmy, że A spełnia kryterium Sylvestera: $\det A^{(i)} > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Czy wynika stąd, że B spełnia kryterium Sylvestera?

(b) Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, < \, , \, >)$. Niech baza $\mathcal{B}$ przestrzeni V będzie zadana warunkiem $M(id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = C$, gdzie C jest macierzą ortogonalną. Czy baza $\mathcal{B}$ też jest ortonormalna?

(c) Czy dla każdych dwóch podprzestrzeni H_1, H_2 przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, < \, , \, >)$ istnieje izometria $f : H \to H$ taka, że $\forall z \in H_1 \; f(z) \in H_2$?

(d) Dana jest przestrzeń euklidesowa liniowa $(V, < \ , \ >)$ i przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ spełniające $\forall \alpha \in V \ (\|\alpha\| = 1 \ \Rightarrow \ \|\varphi(\alpha)\| = 1)$. Czy φ jest izometrią?

(e) Niech $(H, < \ , \ >)$ będzie $n-$wymiarową przestrzenią euklidesową afiniczną i niech $f : H \to H$ będzie izomorfizmem afinicznym, który zachowuje orientację i zachowuje miarę $n-$wymiarowych równoległościanów. Ile wynosi $\det f'$?

(f) Niech $(V, < \ , \ >)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową i niech $\varphi : V \to V$ będzie endomorfizmem diagonalizowalnym. Czy wynika stąd, że φ jest przekształceniem samosprzężonym?

6. [18 punktów]

Niech $(V, < \ , \ >)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową.

(a) Niech $\varphi : V \to V, \ \psi : V \to V$ będą przekształceniami samosprzężonymi przestrzeni $(V, < \ , \ >)$ i niech złożenie $\psi \circ \varphi$ będzie rzutem. Czy wynika stąd, że złożenie $\varphi \circ \psi$ też jest rzutem?

(b) Pokazać, że jeśli $\varphi : V \to V$ jest przekształceniem liniowym takim, że $\varphi \circ \varphi = \varphi$ i dla każdego $\alpha \in V \ \ \|\varphi(\alpha)\| \leqslant \|\alpha\|$, to φ jest rzutem prostopadłym.

GAL II, Kolokwium 2 TEMAT **B** 23.05.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Dane są formy dwuliniowe g oraz h na przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takie, że forma g zadana jest wzorem: $g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + tx_3y_3 + 2x_1y_3 + sx_3y_1$, a w bazie $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ forma h ma macierz $G(h; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Obliczyć $G(h; \mathrm{st})$.

   (b) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ forma g jest symetryczna?

   (c) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ forma g jest iloczynem skalarnym?

2. [18 punktów]

   W $\mathbb{R}^4$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.

   (a) Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\}$.

   (b) Znaleźć układ równań opisujący przestrzeń $W^{\perp}$.

   (c) Niech $\alpha_t = (2t, 4, 0, t^2)$ i niech β_t będzie rzutem prostopadłym wektora α_t na prostą $lin((1, 1, 1, 1))$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ długość wektora β_t jest najmniejsza?

3. [10 punktów]

   Niech $(V, < \, , \, >)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową, $\mathcal{A}$ jej bazą ortonormalną i niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $A = M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$. Wykazać, że:

   φ jest izometrią przestrzeni $(V, < \, , \, >) \iff A^T A$ jest macierzą jednostkową.

GAL II, Kolokwium 2 TEMAT **B** 23.05.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na oddzielnych kartkach. Kartka z treścią zadań może być użyta do wpisania rozwiązań zadania 5.

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

W $\mathbb{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.

(a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ przekształcenie $f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadane wzorem $f_s((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{10}(8x_1 + 6x_3, 6x_1 - 8x_3, sx_2)$ jest izometrią?

(b) Niech $p = (1, 2, 1)$ i niech $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = -1\}$ oraz niech q będzie rzutem prostopadłym punktu p na płaszczyznę M. Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie izometrią spełniającą warunki: $g(p) = p$ oraz $\forall z \in M \;\; g(z) \in M$. Wyznaczyć $g(q)$.

(c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje izometria $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniająca: $f((3, 1, 1)) = (1, 2, 0)$, $f((2, 3, 3)) = (3, 4, t)$? Dla każdego takiego t podać przykład odpowiadającej mu izometrii.

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) Dane są macierze symetryczne $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ spełniające $B = C^T AC$ dla pewnej macierzy odwracalnej $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Przypuśćmy, że A spełnia kryterium Sylvestera: $\det A^{(i)} > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$. Czy wynika stąd, że B spełnia kryterium Sylvestera?

(b) Niech $\mathcal{A}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, < \, , \, >)$. Niech baza $\mathcal{B}$ przestrzeni V będzie zadana warunkiem $M(id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = C$, gdzie C jest macierzą ortogonalną. Czy baza $\mathcal{B}$ też jest ortonormalna?

(c) Czy dla każdych dwóch podprzestrzeni H_1, H_2 przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, < \, , \, >)$ istnieje izometria $f : H \to H$ taka, że $\forall z \in H_1 \; f(z) \in H_2$?

(d) Dana jest przestrzeń euklidesowa liniowa $(V, < \ , \ >)$ i przekształcenie liniowe $\varphi : V \to V$ spełniające $\forall \alpha \in V \ (\|\alpha\| = 1 \ \Rightarrow \ \|\varphi(\alpha)\| = 1)$. Czy φ jest izometrią?

(e) Niech $(H, < \ , \ >)$ będzie $n-$wymiarową przestrzenią euklidesową afiniczną i niech $f : H \to H$ będzie izomorfizmem afinicznym, który zachowuje orientację i zachowuje miarę $n-$wymiarowych równoległościanów. Ile wynosi $\det f'$?

(f) Niech $(V, < \ , \ >)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową i niech $\varphi : V \to V$ będzie endomorfizmem diagonalizowalnym. Czy wynika stąd, że φ jest przekształceniem samosprzężonym?

6. [18 punktów]

Niech $(V, < \ , \ >)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową.

(a) Niech $\varphi : V \to V, \ \psi : V \to V$ będą przekształceniami samosprzężonymi przestrzeni $(V, < \ , \ >)$ i niech złożenie $\psi \circ \varphi$ będzie rzutem. Czy wynika stąd, że złożenie $\varphi \circ \psi$ też jest rzutem?

(b) Pokazać, że jeśli $\varphi : V \to V$ jest przekształceniem liniowym takim, że $\varphi \circ \varphi = \varphi$ i dla każdego $\alpha \in V \ \ \|\varphi(\alpha)\| \leqslant \|\alpha\|$, to φ jest rzutem prostopadłym.