GAL II, Kolokwium 1 TEMAT **A** 04.04.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ endomorfizm $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dany jest wzorem $\varphi_t((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + tx_3)$. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Znaleźć wszystkie takie $t \in \mathbb{R}$ dla których istnieją bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takie, że $M(\varphi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A$. Dla φ_2 podać przykład takich baz (jeśli istnieją).

   (b) Znaleźć wszystkie takie $t \in \mathbb{R}$ dla których istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A$. Dla każdego takiego $t \in \mathbb{R}$ podać przykład takiej bazy.

2. [18 punktów]

   Dla podzbiorów H_1, H_2 przestrzeni $\mathbb{R}^3$ definiujemy zbiór $H_3 = \{tp + (1-t)q \mid p \in H_1, q \in H_2, t \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Dla $H_1 = (1,0,1) + \operatorname{lin}((1,1,0))$, $H_2 = (1,1,2) + \operatorname{lin}((1,1,0))$ znaleźć równanie opisujące H_3.

   (b) Dla $H_1 = (2,1,0) + \operatorname{lin}((3,2,1))$, $H_2 = (2,1,0) + \operatorname{lin}((1,1,4))$ znaleźć bazę punktową i układ bazowy przestrzeni H_3.

   (c) Czy dla $H_1 = (0,0,1) + \operatorname{lin}((1,0,0))$, $H_2 = (1,0,0) + \operatorname{lin}((0,1,0))$ zbiór H_3 jest przestrzenią afiniczną w R^3? Odpowiedź uzasadnić.

3. [10 punktów]

   Wykazać, że dla dowolnego ciała K i dowolnej macierzy $A \in M_{n\times n}(K)$ następujące warunki są równoważne:

   (i) istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych endomorfizmu $\varphi : K^n \to K^n$ zadanego warunkiem $M(\varphi)_{st}^{st} = A$,

   (ii) istnieje macierz odwracalna $C \in M_{n\times n}(K)$ taka, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

GAL II, Kolokwium 1 TEMAT **A** 04.04.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na oddzielnych kartkach. Kartka z treścią zadań może być użyta do wpisania rozwiązań zadania 5.

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

Dla każdego $s \in \mathbb{R}$ dana jest macierz $A_s = \begin{bmatrix} 3 & 1 & s & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$

(a) Znaleźć postać Jordana macierzy A_s w zależności od $s \in \mathbb{R}$.

(b) Dla $s = 1$ znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu $\varphi_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego warunkiem $M(\varphi_1)_{st}^{st} = A_1$.

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) Czy istnieje endomorfizm $\varphi : V \to V$ 5-wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$ taki, że liczby 1, 4, 7 są wartościami własnymi φ oraz $\dim V_{(4)} = 4$?

(b) Niech $\varphi : V \to V$ będzie endomorfizmem n-wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Załóżmy, że $\dim \ker(\varphi) = k$. Czy istnieje wielomian $g(\lambda) \in K[\lambda]$ taki, że $w_\varphi(\lambda) = \lambda^k \cdot g(\lambda)$?

(c) Czy istnieje macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz parami różne liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ takie, że dla każdego $i = 1, \ldots, n+1$ zachodzi $r(A - a_i I) = n - 1$?

(d) Dany jest endomorfizm $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Wiemy, że φ^2 jest diagonalizowalny. Czy wynika stąd, że φ jest diagonalizowalny? Jak jest odpowiedź, gdy $\mathbb{C}$ zastąpić przez $\mathbb{R}$?

(e) Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są diagonalizowalne nad ciałem K. Załóżmy, że ich wielomiany charakterystyczna są takie same. Czy wynika stąd, że macierze A, B są podobne?

(f) $p_0, p_1, \ldots, p_k$ jest bazą punktową przestrzeni afinicznej H. Czy dla każdego wektora $\alpha \in T(H)$ punkty $p_0 + \alpha, p_1 + \alpha, \ldots, p_k + \alpha$ też tworzą bazę punktową przestrzeni H?

6. [18 punktów]

Dana jest macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(a) Załóżmy, że 1 jest jedyną wartością własną macierzy A. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej k macierze A oraz A^k są podobne.

(b) Przypuśćmy, że $A^m = 0$ dla pewnego naturalnego m. Wykazać, że istnieje macierz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ taka, że $A + I = B^2$.

GAL II, Kolokwium 1 TEMAT **A** 04.04.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ endomorfizm $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dany jest wzorem $\varphi_t((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + tx_3)$. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) Znaleźć wszystkie takie $t \in \mathbb{R}$ dla których istnieją bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ takie, że $M(\varphi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A$. Dla φ_2 podać przykład takich baz (jeśli istnieją).

   (b) Znaleźć wszystkie takie $t \in \mathbb{R}$ dla których istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi_t)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A$. Dla każdego takiego $t \in \mathbb{R}$ podać przykład takiej bazy.

2. [18 punktów]

   Dla podzbiorów H_1, H_2 przestrzeni $\mathbb{R}^3$ definiujemy zbiór $H_3 = \{tp + (1-t)q \mid p \in H_1, q \in H_2, t \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Dla $H_1 = (1,0,1) + \operatorname{lin}((1,1,0))$, $H_2 = (1,1,2) + \operatorname{lin}((1,1,0))$ znaleźć równanie opisujące H_3.

   (b) Dla $H_1 = (2,1,0) + \operatorname{lin}((3,2,1))$, $H_2 = (2,1,0) + \operatorname{lin}((1,1,4))$ znaleźć bazę punktową i układ bazowy przestrzeni H_3.

   (c) Czy dla $H_1 = (0,0,1) + \operatorname{lin}((1,0,0))$, $H_2 = (1,0,0) + \operatorname{lin}((0,1,0))$ zbiór H_3 jest przestrzenią afiniczną w R^3? Odpowiedź uzasadnić.

3. [10 punktów]

   Wykazać, że dla dowolnego ciała K i dowolnej macierzy $A \in M_{n \times n}(K)$ następujące warunki są równoważne:

   (i) istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni K^n złożona z wektorów własnych endomorfizmu $\varphi : K^n \to K^n$ zadanego warunkiem $M(\varphi)_{st}^{st} = A$,

   (ii) istnieje macierz odwracalna $C \in M_{n \times n}(K)$ taka, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

GAL II, Kolokwium 1 TEMAT **A** 04.04.2016

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na oddzielnych kartkach. Kartka z treścią zadań może być użyta do wpisania rozwiązań zadania 5.

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

Dla każdego $s \in \mathbb{R}$ dana jest macierz $A_s = \begin{bmatrix} 3 & 1 & s & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$

(a) Znaleźć postać Jordana macierzy A_s w zależności od $s \in \mathbb{R}$.

(b) Dla $s = 1$ znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu $\varphi_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego warunkiem $M(\varphi_1)^{st}_{st} = A_1$.

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) Czy istnieje endomorfizm $\varphi : V \to V$ 5-wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$ taki, że liczby 1, 4, 7 są wartościami własnymi φ oraz $\dim V_{(4)} = 4$?

(b) Niech $\varphi : V \to V$ będzie endomorfizmem n-wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Załóżmy, że $\dim \ker(\varphi) = k$. Czy istnieje wielomian $g(\lambda) \in K[\lambda]$ taki, że $w_\varphi(\lambda) = \lambda^k \cdot g(\lambda)$?

(c) Czy istnieje macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ oraz parami różne liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ takie, że dla każdego $i = 1, \ldots, n+1$ zachodzi $r(A - a_i I) = n - 1$?

(d) Dany jest endomorfizm $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Wiemy, że φ^2 jest diagonalizowalny. Czy wynika stąd, że φ jest diagonalizowalny? Jak jest odpowiedź, gdy $\mathbb{C}$ zastąpić przez $\mathbb{R}$?

(e) Macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ są diagonalizowalne nad ciałem K. Załóżmy, że ich wielomiany charakterystyczna są takie same. Czy wynika stąd, że macierze A, B są podobne?

(f) $p_0, p_1, \ldots, p_k$ jest bazą punktową przestrzeni afinicznej H. Czy dla każdego wektora $\alpha \in T(H)$ punkty $p_0 + \alpha, p_1 + \alpha, \ldots, p_k + \alpha$ też tworzą bazę punktową przestrzeni H?

6. [18 punktów]

Dana jest macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

(a) Załóżmy, że 1 jest jedyną wartością własną macierzy A. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej k macierze A oraz A^k są podobne.

(b) Przypuśćmy, że $A^m = 0$ dla pewnego naturalnego m. Wykazać, że istnieje macierz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ taka, że $A + I = B^2$.