**GAL II, Kolokwium 2** TEMAT **A** 15.05.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dana jest prosta $L = (2,1,0) + \text{lin}((1,0,-1))$ oraz płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$. Znaleźć

   (a) wzór na przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będące rzutem na $L$ wzdłuż $W = \text{lin}((1,1,1),(0,1,3))$,

   (b) parametryzację obrazu płaszczyzny $M$ w jednokładności o środku $(0,0,1)$ i skali 2.

2. [18 punktów]

   W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dana jest forma dwuliniowa $h((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, podprzestrzeń $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}$ oraz rodzina podprzestrzeni $Z_t = \text{lin}((1,0,t,0),(0,1,0,0))$ dla $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Sprawdzić, że forma $h$ ograniczona do podprzestrzeni $W$ jest iloczynem skalarnym. Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(W, h|_W)$ oraz znaleźć współrzędne wektora $(0,1,1,1)$ w otrzymanej bazie przestrzeni $W$.

   (b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma $h$ ograniczona do podprzestrzeni $Z_t$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $Z_t$?

3. [10 punktów]

   (a) Podać definicję iloczynu skalarnego na rzeczywistej przestrzeni liniowej oraz podać definicję iloczynu wektorowego wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ w $n$-wymiarowej, zorientowanej przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, <,>)$.

   (b) Niech $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni $V$ i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będzie układem prostopadłym niezerowych wektorów w przestrzeni $V$. Wykazać, że układ $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

**GAL II, Kolokwium 2** TEMAT **A** 15.05.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach. Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są: płaszczyzna $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$, proste $L = (2, 0, 1) + \operatorname{lin}((1, 0, 1))$, $K = (1, 2, 1) + \operatorname{lin}((1, 1, 0))$ oraz krzywa $S = \{(t, t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Znaleźć parametryzację prostej $M$ będącej obrazem prostej $L$ w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny $H$.

(b) Obliczyć odległość prostej $L$ od prostej $K$.

(c) Na krzywej $S$ znaleźć punkt leżący najbliżej płaszczyzny $H$.

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) Niech $M, N$ będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $H$. Załóżmy, że $M \cap N \neq \emptyset$. Czy wynika stąd, że dla każdych puktów $p \in M, q \in N$ wektor $\overrightarrow{pq}$ można przedstawią jako $\overrightarrow{pq} = \alpha + \beta$ dla pewnych $\alpha \in T(M), \beta \in T(N)$?

(b) Niech $H_1$ będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $H_2$ będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Czy dla każdego przekształcenia afinicznego $f : H_1 \to H_2$ istnieje przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że $F(p) = f(p)$ dla każdego $p \in H_1$?

(c) Niech $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym. Czy dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $W \subset V$ zachodzi $V = W \oplus W^{\perp}$? Czy warunek, że $W$ jest skończenie wymiarowa jest istotny?

(d) Czy istnieje 5-wymiarowa przestrzeń euklidesowa liniowa $(V, <, >)$ zawierająca układ 7 wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$, którego wyznacznik Grama $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$ jest dodatni?

(e) Niech $(H, <, >)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech $M$ będzie jej podprzestrzenią. Niech $p_1 \in H$ i niech $p_2$ będzie rzutem protopadłym punktu $p_1$ na przestrzeń $M$. Czy przestrzeń $M$ może zawierać punkt $q$ taki, że $\rho(p_1, q) < \rho(p_1, p_2)$?

(f) Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $k_1, \ldots, k_n$ i niech $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $t_1, \ldots, t_n$. Załóżmy, że $\det A = -3$ i $\det B = -7$. Czy bazy $k_1, \ldots, k_n$ i $t_1, \ldots, t_n$ są zgodnie zorientowane?

6. [18 punktów]

Niech $f : H \to H$ będzie przekształceniem afinicznym. Mówimy, że punkt $p \in H$ jest punktem stałym przekształcenia $f$, jeśli $f(p) = p$. Mówimy, że podprzestrzeń $M$ przestrzeni $H$ jest $f$-niezmiennicza, jeśli dla każdego $q \in M$ zachodzi $f(q) \in M$.

(a) Wykazać, że jeśli $p$ jest punktem stałym przekształcenia $f$ a $M \subset H$ jest podprzestrzenią $f$-niezmienniczą, to $H$ zawiera podprzestrzeń $f$-niezmienniczą $N$ taką, że $p \in N$, $\dim N = \dim M$ oraz $N$ jest równoległa do $M$.

(b) Wykazać, że jeśli przekształcenie $f$ ma dokładnie jeden punkt stały, to każda podprzestrzeń $f$-niezmiennicza zawiera ten punkt stały.

**GAL II, Kolokwium 2** TEMAT **B** 15.05.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dana jest prosta $L = (2,1,0) + \operatorname{lin}((1,0,-1))$ oraz płaszczyzna $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 2\}$. Znaleźć

   (a) wzór na przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będące rzutem na $L$ wzdłuż $W = \operatorname{lin}((1,1,1),(0,1,3))$,

   (b) parametryzację obrazu płaszczyzny $M$ w jednokładności o środku $(0,0,1)$ i skali 2.

2. [18 punktów]

   W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ dana jest forma dwuliniowa $h((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) = x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_4y_4 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$, podprzestrzeń $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0\}$ oraz rodzina podprzestrzeni $Z_t = \operatorname{lin}((1,0,t,0),(0,1,0,0))$ dla $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Sprawdzić, że forma $h$ ograniczona do podprzestrzeni $W$ jest iloczynem skalarnym. Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(W, h|_W)$ oraz znaleźć współrzędne wektora $(0,1,1,1)$ w otrzymanej bazie przestrzeni $W$.

   (b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma $h$ ograniczona do podprzestrzeni $Z_t$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $Z_t$?

3. [10 punktów]

   (a) Podać definicję iloczynu skalarnego na rzeczywistej przestrzeni liniowej oraz podać definicję iloczynu wektorowego wektorów $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ w $n$-wymiarowej, zorientowanej przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, <,>)$.

   (b) Niech $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni $V$ i niech $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ będzie układem prostopadłym niezerowych wektorów w przestrzeni $V$. Wykazać, że układ $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ jest liniowo niezależny.

**GAL II, Kolokwium 2** TEMAT **B** 15.05.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach. Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są: płaszczyzna $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 2\}$, proste $L = (2, 0, 1) + \operatorname{lin}((1, 0, 1))$, $K = (1, 2, 1) + \operatorname{lin}((1, 1, 0))$ oraz krzywa $S = \{(t, t^2, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Znaleźć parametryzację prostej $M$ będącej obrazem prostej $L$ w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny $H$.

(b) Obliczyć odległość prostej $L$ od prostej $K$.

(c) Na krzywej $S$ znaleźć punkt leżący najbliżej płaszczyzny $H$.

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) Niech $M, N$ będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej $H$. Załóżmy, że $M \cap N \neq \emptyset$. Czy wynika stąd, że dla każdych puktów $p \in M, q \in N$ wektor $\overrightarrow{pq}$ można przedstawią jako $\overrightarrow{pq} = \alpha + \beta$ dla pewnych $\alpha \in T(M), \beta \in T(N)$?

(b) Niech $H_1$ będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $H_2$ będzie podprzestrzenią afiniczną przestrzeni $\mathbb{R}^m$. Czy dla każdego przekształcenia afinicznego $f : H_1 \to H_2$ istnieje przekształcenie afiniczne $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takie, że $F(p) = f(p)$ dla każdego $p \in H_1$?

(c) Niech $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym. Czy dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $W \subset V$ zachodzi $V = W \oplus W^{\perp}$? Czy warunek, że $W$ jest skończenie wymiarowa jest istotny?

(d) Czy istnieje 5-wymiarowa przestrzeń euklidesowa liniowa $(V, <, >)$ zawierająca układ 7 wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_7$, którego wyznacznik Grama $W(\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$ jest dodatni?

(e) Niech $(H, <, >)$ będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech $M$ będzie jej podprzestrzenią. Niech $p_1 \in H$ i niech $p_2$ będzie rzutem protopadłym punktu $p_1$ na przestrzeń $M$. Czy przestrzeń $M$ może zawierać punkt $q$ taki, że $\rho(p_1, q) < \rho(p_1, p_2)$?

(f) Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $k_1, \ldots, k_n$ i niech $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą o kolumnach $t_1, \ldots, t_n$. Załóżmy, że $\det A = -3$ i $\det B = -7$. Czy bazy $k_1, \ldots, k_n$ i $t_1, \ldots, t_n$ są zgodnie zorientowane?

6. [18 punktów]

Niech $f : H \to H$ będzie przekształceniem afinicznym. Mówimy, że punkt $p \in H$ jest punktem stałym przekształcenia $f$, jeśli $f(p) = p$. Mówimy, że podprzestrzeń $M$ przestrzeni $H$ jest $f$-niezmiennicza, jeśli dla każdego $q \in M$ zachodzi $f(q) \in M$.

(a) Wykazać, że jeśli $p$ jest punktem stałym przekształcenia $f$ a $M \subset H$ jest podprzestrzenią $f$-niezmienniczą, to $H$ zawiera podprzestrzeń $f$-niezmienniczą $N$ taką, że $p \in N$, $\dim N = \dim M$ oraz $N$ jest równoległa do $M$.

(b) Wykazać, że jeśli przekształcenie $f$ ma dokładnie jeden punkt stały, to każda podprzestrzeń $f$-niezmiennicza zawiera ten punkt stały.