GAL II, Kolokwium 1 TEMAT **A** 27.03.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Niech przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane następującym wzorem: $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2 + x_4, x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4, 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4)$.

   (a) Znaleźć taką bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz taką bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A = [a_{ij}]$ spełnia: $a_{ij} = 0$ dla $j = 3, 4$.

   (b) Niech $r(\varphi)$ oznacza rząd przekształcenia φ. Znaleźć taką bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz taką bazę $\mathcal{D}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = B = [b_{ij}]$ spełnia: $b_{ij} = 1$ dla $i = j = 1, \ldots, r(\varphi)$ oraz $b_{ij} = 0$ dla pozostałych i, j.

2. [18 punktów]

   Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadany wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-x_1 - 3x_2, 6x_1 + 8x_2, 6x_1 + 3x_2 + 5x_3)$.

   (a) Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny? Jeśli jest, to podać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych endomorfizmu φ. Jeśli nie jest, to dlaczego?

   (b) Niech $A = M(\varphi)_{st}$ i niech $A^{100} = B = [b_{ij}]$. Obliczyć b_{11}.

3. [10 punktów]

   (a) Podać definicję podprzestrzeni φ-niezmienniczej dla endomorfizmu $\varphi : V \to V$ oraz definicję wartości własnej endomorfizmu $\varphi : V \to V$.

   (b) Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Wykazać, że:
   Istnieje macierz $C \in M_{n\times n}(K)$ taka, że $B = C^{-1}AC \iff$ Istnieje endomorfizm $\varphi : K^n \to K^n$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}},\ B = M(\varphi)_{\mathcal{B}}$.

GAL II, Kolokwium 1 TEMAT **A** 27.03.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach. Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & t & 0 & -3 \\ -2 & -t & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(a) Znaleźć postać Jordana macierzy A. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym warunkiem $M(\varphi)_{st} = A$. Znaleźć bazę Jordana dla φ.

(b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierze B, C są podobne?

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) $\varphi \in End(V)$, α jest wektorem własnym endomorfizmu φ o wartości własnej a, β jest wektorem własnym endomorfizmu φ o wartości własnej b. Przypuśćmy, że $\alpha+\beta$ też jest wektorem własnym endomorfizmu φ. Czy wynika stąd, że $a = b$?

(b) Czy istnieje endomorfizm rzeczywistej przestrzeni liniowej posiadający wektory własne α, β, γ o wartościach własnych 2, 5, -7 odpowiednio, spełniające: $\alpha + \beta + \gamma = 0$?

(c) φ jest endomorfizmem 7-wymiarowej przestrzeni liniowej V. Przypuśćmy, że 3 jest wartością własną endomorfizmu φ, przy czym $\dim V_{(3)} = 6$ oraz przypuśćmy, że φ nie jest monomorfizmem. Czy wynika stąd, że endomorfizm φ jest diagonalizowalny?

(d) Dane są macierze $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, o których wiemy, że nie są diagonalne i mają wielomiany charakterystyczne $w_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 = w_B(\lambda)$. Czy wynika stąd, że macierze A, B są podobne?

(e) Ile jest klas podobieństwa macierzy w $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ o wielomianie charakterystycznym wynoszącym $(5-\lambda)^4$?

(f) Czy istnieje macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ taka, że układ $I, A, A^2, A^3, \ldots, A^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest liniowo niezależny?

6. [18 punktów]

Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : V \to V$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K.

(a) Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią φ-niezmiennniczą i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu φ o parami różnych wartościach własnych. Wykazać, że jeśli zachodzi $\alpha_1 \ldots + \alpha_k \in W$, to $\alpha_i \in W$ dla $i = 1, \ldots, k$.

(b) Wykazać, że jeśli V jest skończenie wymiarowa i K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to: endomorfizm φ jest diagonalizowalny $\iff$ dla każdej podprzestrzeni φ-niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń φ-niezmiennicza $W' \subset V$ taka, że $V = W \oplus W'$.

GAL II, Kolokwium 1 TEMAT **B** 27.03.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [18 punktów]

   Niech przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane następującym wzorem: $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4, 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4)$.

   (a) Znaleźć taką bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz taką bazę $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = A = [a_{ij}]$ spełnia: $a_{ij} = 0$ dla $j = 3, 4$.

   (b) Niech $r(\varphi)$ oznacza rząd przekształcenia φ. Znaleźć taką bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$ oraz taką bazę $\mathcal{D}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = B = [b_{ij}]$ spełnia: $b_{ij} = 1$ dla $i = j = 1, \ldots, r(\varphi)$ oraz $b_{ij} = 0$ dla pozostałych i, j.

2. [18 punktów]

   Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadany wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-x_1 + 3x_2, -6x_1 + 8x_2, -6x_1 + 3x_2 + 5x_3)$.

   (a) Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny? Jeśli jest, to podać bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych endomorfizmu φ. Jeśli nie jest, to dlaczego?

   (b) Niech $A = M(\varphi)_{st}$ i niech $A^{100} = B = [b_{ij}]$. Obliczyć b_{11}.

3. [10 punktów]

   (a) Podać definicję podprzestrzeni φ-niezmienniczej dla endomorfizmu $\varphi : V \to V$ oraz definicję wartości własnej endomorfizmu $\varphi : V \to V$.

   (b) Niech $A, B \in M_{n \times n}(K)$. Wykazać, że:
   Istnieje macierz $C \in M_{n \times n}(K)$ taka, że $B = C^{-1}AC \iff$ Istnieje endomorfizm $\varphi : K^n \to K^n$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni K^n takie, że $A = M(\varphi)_{\mathcal{A}}, \; B = M(\varphi)_{\mathcal{B}}$.

GAL II, Kolokwium 1 TEMAT **B** 27.03.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach. Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [18 punktów]

Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & t & -1 & -3 \\ -2 & -t & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

(a) Znaleźć postać Jordana macierzy A. Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym warunkiem $M(\varphi)_{st} = A$. Znaleźć bazę Jordana dla φ.

(b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierze B, C są podobne?

5. [każde pytanie za 3 punkty]

(a) $\varphi \in End(V)$, α jest wektorem własnym endomorfizmu φ o wartości własnej a, β jest wektorem własnym endomorfizmu φ o wartości własnej b. Przypuśćmy, że $\alpha+\beta$ też jest wektorem własnym endomorfizmu φ. Czy wynika stąd, że $a = b$?

(b) Czy istnieje endomorfizm rzeczywistej przestrzeni liniowej posiadający wektory własne α, β, γ o wartościach własnych 3, 2, -5 odpowiednio, spełniające: $\alpha + \beta + \gamma = 0$?

(c) φ jest endomorfizmem 6-wymiarowej przestrzeni liniowej V. Przypuśćmy, że 4 jest wartością własną endomorfizmu φ, przy czym $\dim V_{(4)} = 5$ oraz przypuśćmy, że φ nie jest monomorfizmem. Czy wynika stąd, że endomorfizm φ jest diagonalizowalny?

(d) Dane są macierze $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, o których wiemy, że nie są diagonalne i mają wielomiany charakterystyczne $w_A(\lambda) = (3-\lambda)^2 = w_B(\lambda)$. Czy wynika stąd, że macierze A, B są podobne?

(e) Ile jest klas podobieństwa macierzy w $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ o wielomianie charakterystycznym wynoszącym $(2-\lambda)^4$?

(f) Czy istnieje macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ taka, że układ $I, A, A^2, A^3, \ldots, A^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest liniowo niezależny?

6. [18 punktów]

Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : V \to V$ przestrzeni liniowej V nad ciałem K.

(a) Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią φ-niezmiennniczą i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu φ o parami różnych wartościach własnych. Wykazać, że jeśli zachodzi $\alpha_1 \ldots + \alpha_k \in W$, to $\alpha_i \in W$ dla $i = 1, \ldots, k$.

(b) Wykazać, że jeśli V jest skończenie wymiarowa i K jest ciałem algebraicznie domkniętym, to: endomorfizm φ jest diagonalizowalny $\iff$ dla każdej podprzestrzeni φ-niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń φ-niezmiennicza $W' \subset V$ taka, że $V = W \oplus W'$.