GAL II, Egzamin TEMAT **A** 26.06.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [40 punktów]

   Dane są macierze rzeczywiste $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Czy istnieje macierz ortogonalna $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ taka, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna?

   (b) Czy macierze A i B są podobne?

   (c) Czy istnieje macierz ortogonalna $P \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ taka, że $B = P^{-1}AP$?

   (d) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ zadana warunkiem $G(h; st) = A - sI$ jest iloczynem skalarnym?

   UWAGA: W pytaniach (a) i (c), jeśli odpowiedź jest tak, to podać przykład szukanej macierzy, jeśli odpowiedź jest nie, to uzasadnić dlaczego taka macierz nie istnieje.

2. [40 punktów]

   Forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$
   $= x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

   (a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h)$.

   (b) Niech $W = \mathrm{lin}\,((0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Czy zachodzi $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$?

   (c) Czy dla każdej 1-wymiarowej podprzestrzeni Z przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h)$ mamy $\mathbb{R}^3 = Z \oplus Z^{\perp}$?

   (d) Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową związaną z formą dwuliniową h warunkiem: dla każdego $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ $g((x_1, x_2, x_3)) = h((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3))$.

   Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid g((x_1, x_2, x_3)) + 2x_2 + 1 = 0\}$. Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X i wykonać szkicowy rysunek.

3. [30 punktów]

   (a) Podać definicje formy dwuliniowej i formy kwadratowej na przestrzeni liniowej oraz definicję funkcji wielomianowej na przestrzeni afinicznej.

   (b) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, < , >)$. Wykazać, że dla każdego wektora $\alpha \in V$ jego współrzędne w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wynoszą: $< \alpha, \alpha_1 >$, $< \alpha, \alpha_2 >, \ldots, < \alpha, \alpha_n >$.

   (c) Niech $h : W \times W \to \mathbb{R}$ będzie taką formą dwuliniową symetryczną na rzeczywistej przestrzeni liniowej W, że dla pewnej bazy prostopadłej $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni dwuliniowej (W, h) zachodzi: $\forall_{i=1,\ldots,n}\ h(\alpha_i, \alpha_i) > 0$. Wykazać, że h jest iloczynem skalarnym.

GAL II, Egzamin TEMAT **A** 26.06.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach. Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [30 punktów]

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.

(a) Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{3}(-x_1 + 2x_2 + ax_3, 2x_1 + bx_2 + 2x_3, cx_1 + dx_2 - x_3)$ gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dla jakich $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ przekształcenie f jest izometrią?

(b) Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią prostopadłą względem płaszczyzny H opisanej równaniem $x_1 + x_2 - x_3 = 6$. Znaleźć układ równań opisujący prostą $M = (1, 0, 1) + \mathrm{lin}((2, 1, 0))$ i znaleźć parametryzację prostej $g(M)$.

(c) Niech $L = (1, 0, 0) + \mathrm{lin}((1, -1, -1))$, $K = (5, 3, -2) + \mathrm{lin}((1, 2, -1))$ i niech $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie różną od identyczności izometrią spełniającą warunki: $h(p) = p$ dla każdego $p \in L$ oraz $h(q) \in K$ dla każdego $q \in K$. Obliczyć $h((2, -3, 1))$.

5. [każde pytanie za 5 punktów]

(a) Liczba zespolona z jest wartością własną macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Czy liczba sprzężona do z wówczas też jest wartością własną macierzy A?

(b) Przestrzeń dwuliniowa (V, h) na ciałem $\mathbb{R}$ nie ma niezerowych wektorów izotropowych. Czy musi ona być przestrzenią euklidesową liniową?

(c) Macierze symetryczne $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są podobne. Czy wynika stąd, że A, B są kongruentne nad $\mathbb{R}$?

(d) W n wymiarowej przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, < , >)$ dana jest podprzestrzeń M wymiaru $n-1$. Niech f będzie izometrią przestrzeni $(H, < , >)$. Ile jest różnych od f izometrii g przestrzeni $(H, < , >)$ spełniających: dla każdego $p \in M \quad f(p) = g(p)$?

(e) W rzeczywistej przestrzeni liniowej V wymiaru 9 dane są podprzestrzenie W, Z przy czym $\dim W = 2, \dim Z = 7$ oraz $W \cap Z = \{0\}$. Czy istnieje taki izomorfizm $\varphi : V \to V$, że podprzestrzenie W, Z są $\varphi-$niezmiennicze i izomorfizm φ zachowuje orientację przestrzeni V i Z a zmienia orientację przestrzeni W?

(f) Endomorfizm n wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej nie ma wektora własnego. Czy wynika stąd, że n jest parzyste?

6. [30 punktów]

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Mówimy, że izomorfizm $\varphi : V \to V$ jest automorfizmem przestrzeni dwuliniowej (V, h), jeśli dla każdych wektorów $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Wykazać, że

(a) Złożenie dwóch automorfizmów przestrzeni (V, h) jest automorfizmem przestrzeni (V, h).

(b) Dla każdej nieosobliwej podprzestrzeni $W \subset V$ przekształcenie $\varphi : V \to V$ zadane: $\varphi(\alpha) = \alpha$ dla każdego $\alpha \in W$ oraz $\varphi(\alpha) = -\alpha$ dla każdego $\alpha \in W^{\perp}$ jest automorfizmem przestrzeni (V, h).

(c) Jeśli $\alpha, \beta \in V$ są nieizotropowe i spełniają $h(\alpha, \alpha) = h(\beta, \beta)$, to istnieje automorfizm φ przestrzeni (V, h) taki, że $\varphi(\alpha) = \beta$.

GAL II, Egzamin TEMAT **B** 26.06.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. [40 punktów]

   Dane są macierze rzeczywiste $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Czy istnieje macierz ortogonalna $C \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ taka, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna?

   (b) Czy macierze A i B są podobne?

   (c) Czy istnieje macierz ortogonalna $P \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ taka, że $B = P^{-1}AP$?

   (d) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ zadana warunkiem $G(h; st) = A - sI$ jest iloczynem skalarnym?

   UWAGA: W pytaniach (a) i (c), jeśli odpowiedź jest tak, to podać przykład szukanej macierzy, jeśli odpowiedź jest nie, to uzasadnić dlaczego taka macierz nie istnieje.

2. [40 punktów]

   Forma dwuliniowa $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) =$
   $= x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$.

   (a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h)$.

   (b) Niech $W = \operatorname{lin}((0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Czy zachodzi $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$?

   (c) Czy dla każdej 1-wymiarowej podprzestrzeni Z przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h)$ mamy $\mathbb{R}^3 = Z \oplus Z^\perp$?

   (d) Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową związaną z formą dwuliniową h warunkiem: dla każdego $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ $g((x_1, x_2, x_3)) = h((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3))$.

   Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid g((x_1, x_2, x_3)) - 2x_1 + 5 = 0\}$. Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X i wykonać szkicowy rysunek.

3. [30 punktów]

   (a) Podać definicje formy dwuliniowej i formy kwadratowej na przestrzeni liniowej oraz definicję funkcji wielomianowej na przestrzeni afinicznej.

   (b) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, < , >)$. Wykazać, że dla każdego wektora $\alpha \in V$ jego współrzędne w bazie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wynoszą: $< \alpha, \alpha_1 >$, $< \alpha, \alpha_2 >, \ldots, < \alpha, \alpha_n >$.

   (c) Niech $h : W \times W \to \mathbb{R}$ będzie taką formą dwuliniową symetryczną na rzeczywistej przestrzeni liniowej W, że dla pewnej bazy prostopadłej $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ przestrzeni dwuliniowej (W, h) zachodzi: $\forall_{i=1,\ldots,n}\ h(\alpha_i, \alpha_i) > 0$. Wykazać, że h jest iloczynem skalarnym.

GAL II, Egzamin TEMAT **B** 26.06.2015

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązania zadań 4 i 6 TRZEBA napisać na ODDZIELNYCH kartkach. Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

4. [30 punktów]

   W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.

   (a) Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie dane wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{3}(ax_1+2x_2+2x_3, 2x_1+bx_2+cx_3, 2x_1+dx_2 - x_3)$ gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dla jakich $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ przekształcenie f jest izometrią?

   (b) Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią prostopadłą względem płaszczyzny H opisanej równaniem $x_1 - x_2 + x_3 = 6$. Znaleźć układ równań opisujący prostą $M = (1, 1, 0) + \operatorname{lin}((2, 0, 1))$ i znaleźć parametryzację prostej $g(M)$.

   (c) Niech $L = (0, 0, 1) + \operatorname{lin}((-1, -1, 1))$, $K = (-2, 3, 5) + \operatorname{lin}((-1, 2, 1))$ i niech $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie różną od identyczności izometrią spełniającą warunki: $h(p) = p$ dla każdego $p \in L$ oraz $h(q) \in K$ dla każdego $q \in K$. Obliczyć $h((1, -3, 2))$.

5. [każde pytanie za 5 punktów]

   (a) Liczba zespolona z jest wartością własną macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Czy liczba sprzężona do z wówczas też jest wartością własną macierzy A?

   (b) Przestrzeń dwuliniowa (V, h) na ciałem $\mathbb{R}$ nie ma niezerowych wektorów izotropowych. Czy musi ona być przestrzenią euklidesową liniową?

   (c) Macierze symetryczne $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ są podobne. Czy wynika stąd, że A, B są kongruentne nad $\mathbb{R}$?

(d) W n wymiarowej przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, < \,, >)$ dana jest podprzestrzeń M wymiaru $n-1$. Niech f będzie izometrią przestrzeni $(H, < \,, >)$. Ile jest różnych od f izometrii g przestrzeni $(H, < \,, >)$ spełniających: dla każdego $p \in M \quad f(p) = g(p)$?

(e) W rzeczywistej przestrzeni liniowej V wymiaru 9 dane są podprzestrzenie W, Z przy czym $\dim W = 2, \dim Z = 7$ oraz $W \cap Z = \{0\}$. Czy istnieje taki izomorfizm $\varphi : V \to V$, że podprzestrzenie W, Z są $\varphi-$niezmiennicze i izomorfizm φ zachowuje orientację przestrzeni V i Z a zmienia orientację przestrzeni W?

(f) Endomorfizm n wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej nie ma wektora własnego. Czy wynika stąd, że n jest parzyste?

6. [30 punktów]

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Mówimy, że izomorfizm $\varphi : V \to V$ jest automorfizmem przestrzeni dwuliniowej (V, h), jeśli dla każdych wektorów $\alpha, \beta \in V$ mamy $h(\alpha, \beta) = h(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$. Wykazać, że

(a) Złożenie dwóch automorfizmów przestrzeni (V, h) jest automorfizmem przestrzeni (V, h).

(b) Dla każdej nieosobliwej podprzestrzeni $W \subset V$ przekształcenie $\varphi : V \to V$ zadane: $\varphi(\alpha) = \alpha$ dla każdego $\alpha \in W$ oraz $\varphi(\alpha) = -\alpha$ dla każdego $\alpha \in W^{\perp}$ jest automorfizmem przestrzeni (V, h).

(c) Jeśli $\alpha, \beta \in V$ są nieizotropowe i spełniają $h(\alpha, \alpha) = h(\beta, \beta)$, to istnieje automorfizm φ przestrzeni (V, h) taki, że $\varphi(\alpha) = \beta$.