GAL, Kolokwium 4, Zestaw A

23 maja 2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE)
podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1.

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma dwuliniowa $h_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$h_t((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + tx_1y_3 + tx_2y_2 + x_3y_1 + (2-t)x_3y_3$$

jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$? Dla każdego takiego t w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h_t)$ znaleźć bazę przestrzeni $W^\perp$, gdzie $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_3 = 0\}$.

Zadanie 2.

W $(\mathbb{R}^4, <\, , >_{\mathrm{st}})$ znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \quad | \quad x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 = x_1 + x_4\}$$

oraz znaleźć parametryzację prostej będącej rzutem prostopadłym prostej $\mathrm{af}((1, 1, 0, 1), (1, 0, 0, -1))$ na W.

Zadanie 3.

a) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ istnieje taka izometria f przestrzeni $(\mathbb{R}^3, <\, , >_{\mathrm{st}})$ taka, że

$$f'(1, 0, 0) = s(1, 1, t)\ ,\ f'(0, 0, 1) = s(t, 1, 1)?$$

b) Znaleźć zbiór wszystkich takich punktów $q \in \mathbb{R}^3$, dla których istnieje izometria g przestrzeni $(\mathbb{R}^3, <\, , >_{\mathrm{st}})$ spełniająca warunki:

$$g((1, 0, 1)) = (0, 0, 0)\ ,\ g((1, 1, 1)) = (0, 0, 1),$$
$$g((1, 0, 0)) = (0, 1, 0)\ ,\ g((2, 1, 1)) = q.$$

GAL, Kolokwium 4, Zestaw B

23 maja 2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1.

Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma dwuliniowa $h_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$h_t((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (2 - t)x_1y_1 + x_1y_3 + tx_2y_2 + tx_3y_1 + 2x_3y_3$$

jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$? Dla każdego takiego t w przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h_t)$ znaleźć bazę przestrzeni $W^\perp$, gdzie $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_3 = 0\}$.

Zadanie 2.

W $(\mathbb{R}^4, <\, , >_{\mathrm{st}})$ znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 = x_1 + x_4\}$$

oraz znaleźć parametryzację prostej będącej rzutem prostopadłym prostej $\mathrm{af}((1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, -1))$ na W.

Zadanie 3.

a) Dla jakich $s, t \in \mathbb{R}$ istnieje taka izometria f przestrzeni $(\mathbb{R}^3, <\, , >_{\mathrm{st}})$ taka, że

$$f'(1, 0, 0) = s(t, 1, 1) \;,\; f'(0, 0, 1) = s(1, 1, t)?$$

b) Znaleźć zbiór wszystkich takich punktów $q \in \mathbb{R}^3$, dla których istnieje izometria g przestrzeni $(\mathbb{R}^3, <\, , >_{\mathrm{st}})$ spełniająca warunki:

$$g((0, 1, 1)) = (0, 0, 0) \;,\; g((1, 1, 1)) = (0, 0, 1),$$
$$g((0, 1, 0)) = (0, 1, 0) \;,\; g((1, 2, 1)) = q.$$

Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

Zadanie 4. Niech V oznacza przestrzeń liniową macierzy $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ o wyrazach rzeczywistych i niech $A \in V$ będzie macierzą symetryczną. Niech $h : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie dane wzorem $h(X,Y) = \mathrm{tr}(X^T AY)$ dla każdych $X, Y \in V$, gdzie $\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ oznacza ślad macierzy $B = [b_{ij}] \in V$.

a) Pokazać, że jeżeli A jest macierzą iloczynu skalarnego na $\mathbb{R}^n$, to h jest iloczynem skalarnym na V.

b) Pokazać, że jeżeli h jest iloczynem skalarnym na V, to A jest macierzą iloczynu skalarnego na $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 5. Podać dowód twierdzenia mówiącego, że jeżeli $(V, <,> |_V)$ i $(W, <,> |_W)$ są przestrzeniami euklidesowymi liniowymi, $\mathcal{A}$ jest bazą ortonormalną V i $\mathcal{B}$ jest bazą ortonormalną W, to przekształcenie liniowe $\phi : V \to W$ jest izometrią wtedy i tylko wtedy gdy macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ jest macierzą ortogonalną.

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania:

1. Niech $h : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie iloczynem skalarnym, $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ będzie bazą V i niech $G(h; \mathcal{A}) = [a_{ij}]$. Czy $a_{ii} > 0$ dla każdego $i = 1, ..., n$?

2. Niech $h : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową symetryczną, $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ będzie bazą V i niech $G(h; \mathcal{A}) = [a_{ij}]$. Załóżmy, że $a_{ii} > 0$ dla każdego $i = 1, ..., n$. Czy jest prawdą, że h jest iloczynem skalarnym ?

ODWRÓĆ STRONĘ

3.Niech $(H, <, >)$ będzie euklidesową przestrzenią afiniczną wymiaru 3, $Z \subset H$ podprzestrzenią afiniczna wymiaru 2, $f : Z \to Z$ taką funkcją, że $\rho(p, q) = \rho(f(p), f(q))$ dla każdych $p, q \in Z$. Ile jest izometrii $g : H \to H$ takich, że $g(p) = f(p)$ dla każdego $p \in Z$.

4. Niech $(V, <, >)$ będzie liniową przestrzenią euklidesową i niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem samosprzężonym. Czy dla każdej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest symetryczna?

5. Niech (H, h) będzie przestrzenią afiniczną euklidesową, $M \subset H$ podprzestrzenią afiniczną H, $p \in H$, rzutem prostopadłym p na M. Czy jest prawdą, że $\rho(p, q') \geqslant \rho(p, q)$ dla każdego $q' \in M$?

6. Niech $(V, <, >)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową, $\varphi : V \to V$ izomorfizmem liniowym zmieniającym orientację. Czy istnieje izomorfizm $\psi : V \to V$ taki, że $\psi \circ \varphi$ zachowuje orientacje ?